空間ベクトル／整数

XMAD9A-Z1D1

総得点 /50

1 XMAD9A-11C1

(1) 1	(2) 2	(3) 3
5/5	7/7	0/13

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC があり，辺 OA の中点を D，辺 OB を 2：1 に内分する点を E，辺 OC を $t:(1-t)$（ただし，$0<t<1$）に内分する点を F とする。△DEF の重心を（以下略）

(1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + t\vec{c}\right)$

$= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OG} = \frac{k}{6}\vec{a} + \frac{2}{9}k\vec{b} + \frac{t}{3}k\vec{c}$

と表せて．Hは平面ABC上の点なので

$\frac{k}{6} + \frac{2}{9}k + \frac{t}{3}k = 1$

$k(3+4+6t) = 18$

$k = \frac{18}{6t+7}$

good!

よって

$\overrightarrow{OH} = \frac{3}{6t+7}\vec{a} + \frac{4}{6t+7}\vec{b} + \frac{6t}{6t+7}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{DF} = t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\times1\times\cos60^\circ = \frac{1}{2}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$|\overrightarrow{DE}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= \frac{4}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{16+9-12}{36}$

$= \frac{13}{36}$

$|\overrightarrow{DF}|^2 = t^2|\vec{c}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - t\vec{c}\cdot\vec{a}$

$= t^2 + \frac{1}{4} - \frac{t}{2}$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}t\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{t}{2}\vec{c}\cdot\vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2$

$= \frac{t}{3} - \frac{1}{6} - \frac{t}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{t+1}{12}$

$\triangle DEF = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\left(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{144}(t^2+2t+1)}$

$= \frac{1}{24}\sqrt{51t^2 - 28t + 12}$

Oから DEFに垂線 OK を下ろすと

$\overrightarrow{OK} = x\overrightarrow{OD} + y\overrightarrow{OE} + (1-x-y)\overrightarrow{OF}$

$= \frac{1}{2}x\vec{a} + \frac{2}{3}y\vec{b} + t(1-x-y)\vec{c}$

$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$ より

$\frac{1}{3}x\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{9}y|\vec{b}|^2 + \frac{2}{3}t(1-x-y)\vec{b}\cdot\vec{c}$

$- \frac{1}{4}x|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}y\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}t(1-x-y)\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

$\frac{1}{6}x + \frac{4}{9}y + \frac{1}{3}t(1-x-y) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{4}t(1-x-y) = 0$

$-\frac{1}{12}x + \frac{5}{18}y + \frac{1}{12}t(1-x-y) = 0$ ……①

$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{DF} = 0$ より

$\frac{t}{2}x\vec{c}\cdot\vec{a} + \frac{2}{3}ty\vec{b}\cdot\vec{c} + t^2(1-x-y)|\vec{c}|^2$

$- \frac{1}{4}x|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}y\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}t(1-x-y)\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

$\frac{t}{4}x + \frac{t}{3}y + t^2(1-x-y) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{4}t(1-x-y) = 0$

$\frac{t-1}{4}x + \frac{2t-1}{6}y + \left(t^2 - \frac{t}{4}\right)(1-x-y) = 0$ …②

①と②から yを消去すると

ここまでの計算は正しく出来ています

この先計算ができませんでした…

①と②をそれぞれxとyについて整理すると、
①と②からyを消去することが出来ますが、
t, x, yという3つの文字に対して
①, ②という2つの条件式しか立式できないので、
t, x, yの値を求めることが出来ません。
ここでは、2つの四面体の体積比が
(2)のkを用いて表せることに着目すると、
まずkの値が求まり、次に(2)で得られた
kとtの関係式からtの値も求まります。

（※解答欄は裏面に続きます。）