問題

$a>0$ とする。また，実数 x，y は $x^2+4y^2 \leqq 1$ をみたすとする。このとき，$2xy+ax+2ay$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。 (25 点)

ポイント

条件式つき多変数関数の最大・最小に関する問題である。
与えられた式から，1 文字消去するのは難しそうである。
ここでは，式の形に着目すると

対称式の置き換えの考え方を応用できそうだと気づいてほしいところ（◀ 1）。

すなわち，$x^2+4y^2 \leqq 1$，$2xy+ax+2ay$ ともに「x と $2y$ についての対称式」であるので

$$x+2y=X,\ 2xy=Y$$

と置き，X，Y についての話に持ち込むことができれば合格である。

解　答

$x+2y=X$，$2xy=Y$ とすると，$x^2+4y^2 \leqq 1$ は

$$(x+2y)^2-4xy \leqq 1$$

$$\therefore\quad X^2-2Y \leqq 1$$

より

$$Y \geqq \frac{1}{2}(X^2-1) \quad \cdots\cdots ①$$

と変形できる。

また，x，$2y$ は t の 2 次方程式

$$t^2-(x+2y)t+2xy=0$$

$$\therefore\quad t^2-Xt+Y=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の 2 つの実数解であるから，② の判別式の条件より

◀ 1
x，$2y$ の基本対称式
$x+2y$，$2xy$ を利用する。

◀重解も含まれる。

$$X^2-4Y \geqq 0 \qquad \therefore\quad Y \leqq \frac{1}{4}X^2 \quad \cdots\cdots ③$$

また，$k=2xy+ax+2ay$ とおくと

$$k=2xy+a(x+2y)=Y+aX$$

$$\therefore\quad Y=-aX+k \quad \cdots\cdots ④$$

であるから

① かつ ③ をみたす XY 平面上の領域内の点 $(X,\ Y)$ における k の最大値，最小値

を考えればよい。

$Y=\frac{1}{4}X^2$ と $Y=\frac{1}{2}(X^2-1)$ を連立すると

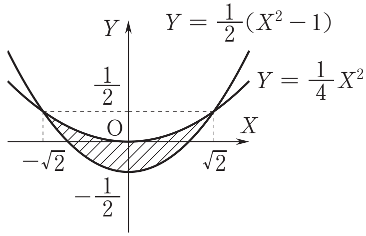
$$\frac{1}{4}X^2=\frac{1}{2}(X^2-1) \quad すなわち \quad X^2=2 \quad \therefore\quad X=\pm\sqrt{2}$$

であり，このとき $Y=\frac{1}{2}$ だから，$Y=\frac{1}{4}X^2$ と $Y=\frac{1}{2}(X^2-1)$ の

交点の座標は

$$\left(\pm\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

よって ① かつ ③ のみたす領域を D とすると，D は図の斜線部（境界を含む）のようになる。

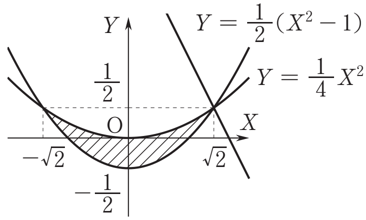


直線 ④ の傾きの値で場合分けをして k の最大，最小を考えればよい。

まず，最大値を考える。k の値は ④ が点 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を通るとき最大となるので，最大値は

$$k=Y+aX$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{2}a$$



◀領域 D と共有点をもつように直線 $Y=-aX+k$ を動かして，直線 $Y=-aX+k$ の y 切片が最大となるとき。

x，$2y$ は t の 2 次方程式 ② の 2 つの実数解であるから

$$t^2-\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=0 \qquad \therefore \quad \left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$$

より

$$(x,\ 2y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \quad (x,\ y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

次に，最小値を考える。

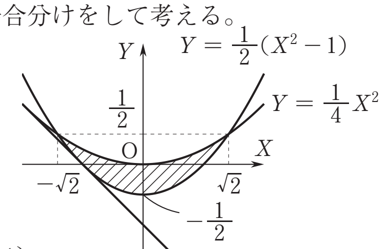
◀最大のときと同様にして考える。直線 $Y=-aX+k$ の傾きについて場合を分けて考える必要がある。

$Y=\frac{1}{2}(X^2-1)$ を X について微分すると，$Y'=X$ だから，$Y=\frac{1}{2}(X^2-1)$ の点 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ における接線の傾きは $-\sqrt{2}$ である。

$-\sqrt{2}\leqq -a<0$ と $-a\leqq -\sqrt{2}$ に場合分けをして考える。

(i) $-\sqrt{2}\leqq -a<0$ すなわち $0<a\leqq\sqrt{2}$ のとき

$Y=\frac{1}{2}(X^2-1)$ と ④ が接するとき，k の値は最小値をとる。



このとき

$$-aX+k=\frac{1}{2}(X^2-1)$$

$$\therefore \quad X^2+2aX-2k-1=0$$

の判別式 D は 0 だから

$$\frac{D}{4}=a^2-(-2k-1)=0$$

$$\therefore \quad k=-\frac{1}{2}(a^2+1)$$

よって，k の最小値は $-\frac{1}{2}(a^2+1)$ であり，このときの接点の X 座標は

$$X^2+2aX+a^2=0$$

$$\therefore \quad (X+a)^2=0$$

より

$$X=-a$$

であり，このとき $Y=\dfrac{1}{2}(a^2-1)$。

x，$2y$ は t の 2 次方程式 ② の 2 つの実数解であるから

$$t^2+at+\frac{1}{2}(a^2-1)=0$$

より

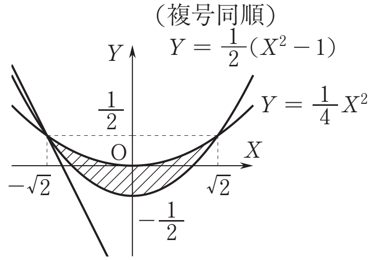
$$(x,\ 2y)=\left(\frac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2},\ \frac{-a\mp\sqrt{2-a^2}}{2}\right)$$

（複号同順）

$$\therefore\ (x,\ y)=\left(\frac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2},\ \frac{-a\mp\sqrt{2-a^2}}{4}\right)$$

（複号同順）

(ii) $-a\leqq-\sqrt{2}$ すなわち $\sqrt{2}\leqq a$ のとき



k の値は ④ が点 $\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき最小となるので，最小値は

$$\begin{aligned}k&=Y+aX\\&=\frac{1}{2}-\sqrt{2}a\end{aligned}$$

x，$2y$ は t の 2 次方程式 ② の 2 つの実数解であるから

$$t^2+\sqrt{2}t+\frac{1}{2}=0\qquad\therefore\ \left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$$

より

$$(x,\ 2y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore\ (x,\ y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

よって

最大値

$$\boldsymbol{\sqrt{2}a+\frac{1}{2},\ (x,\ y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$$ 答

最小値

$0<a\leqq\sqrt{2}$ のとき

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2}(a^2+1),}$$

$$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{-a\pm\sqrt{2-a^2}}{2},\ \frac{-a\mp\sqrt{2-a^2}}{4}\right)}$$

（複号同順） 答

$\sqrt{2}\leqq a$ のとき

$$\boldsymbol{-\sqrt{2}a+\frac{1}{2},}$$

$$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$$ 答

解　説

極　意

・式の特徴をとらえる

本問のように，1 文字消去などでは，答えにたどりつくのがかなり難しい問題がある。このような問題の中で，式の形によっては置き換えなどで数式が扱いやすくなる場合がある。本問では，置き換えに気づきにくいかもしれないが，与えられた式は“x”と“$2y$”を入れ替えても，元の式と変わらない，“x”と“$2y$”についての「対称式」だといえる。

式の形がやや複雑であっても，「対称式」を想起し，考察しやすい形に変形することを目指そう。

次のような問題も，式の形の特徴をとらえ，扱いやすい形で考えるところがポイントである。

（例）実数 x，y，z が

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$$

をみたすとき

$$xyz$$

のとり得る値の範囲を求めよ。　（京大・改）

（解答）

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore \quad xy+yz+zx=5$$

$k=xyz$ とおく。

実数 x，y，z は解と係数の関係より，s の方程式

$$s^3-4s^2+5s-k=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

の実数解である。k のとり得る値の範囲は，$(*)$ が 3 つの実数解（重解を含む）をもつ条件を考えればよい。ここで $(*)$ を

$$k=s^3-4s^2+5s$$

として，右辺を $f(s)$ とおくとき，$y=k$ と $y=s^3-4s^2+5s$ のグラフが 3 つの共有点（接点は 2 つの共有点と考える）をもつ条件を考えればよい。

$f(s)=s^3-4s^2+5s$ より

$$f'(s)=3s^2-8s+5$$
$$=(3s-5)(s-1)$$

よって $f(s)$ の増減は右の表のようになる。

s		1		$\frac{5}{3}$	
$f'(s)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(s)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

したがって，求める値の範囲は

$$\frac{50}{27} \leqq xyz \leqq 2 \quad （答）$$