物理 直前3 V

YQAFXK-21C2-01

2 問題

《相互誘導》

真空中に，図2—1のように，N 巻きで，長さ l，断面が半径 R の円のソレノイドコイル A と，半径が十分に大きい円形の2巻きのコイル B がある。コイル B は，その中心軸がコイル A の中心軸と一致したまま，図2—1の上下方向に移動することができる。コイル A の中心軸の中央の点(これをコイル A の中心とよぶ)を o とし，点 o から下方に，ある距離だけ離れた点を p とする。図2—1のように，コイル A，B の各端点 a，b，c，d は，それぞれ端子 W—X，Y—Z に切り替えることのできるスイッチ S_1，S_2 につながれており，内部抵抗が r，起電力が E で一定の直流電源と，内部抵抗の無視できる電流計からなる回路に接続することができる。また，図2—1の点 G は接地されており，点 G の電位を 0 とする。電流計を流れる電流 i は，図2—1の矢印で示した向きを正とする。ただし，直流電源の内部抵抗以外の電気抵抗，および両コイル以外の部分を流れる電流のつくる磁場は無視できるものとし，問 I ～ V では，コイル B の中心は点 o に一致しているものとする。

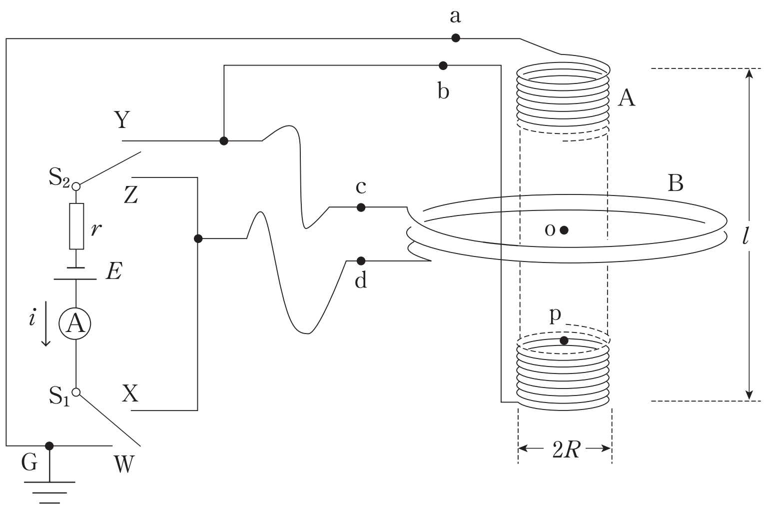


図2—1

最初，スイッチ S_1，S_2 はいずれも各端子には接続されていないものとする。まずは，この状態から，スイッチ S_2 を Y 側に接続した後，スイッチ S_1 を W 側に接続した場合について考える。S_1 を W 側に接続した瞬間を時刻 $t=0$ とすると，電流計を流れる電流 i は，時刻 t とともに図2—2のように変化し，十分に時間が経過したときの電流 i は，一定値 I_0 であった。

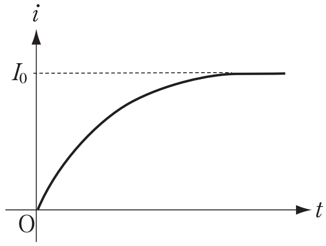


図 2－2

Ⅰ　I_0 の値を求めよ。

Ⅱ　真空の透磁率を μ_0 として，コイル A の自己インダクタンスに関する次の文章中の $\boxed{}$ に入る適切な式を書け。ただし，コイル A の長さ l は，断面の半径 R に比べて十分に大きく，コイル A に電流が流れているとき，コイル A 内には一様な磁場が生じるものとし，コイル A の側面から外部に漏れ出す磁束は無視できるものとする。

> 電流計を流れる電流が i の瞬間，A 内に生じている磁場の磁束密度の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ であるから，このとき A(の一巻き)を貫く磁束は $\boxed{\text{イ}}$ である。
> ところで，S_1 を W 側に接続した瞬間($t=0$)から微小時間 Δt だけ経過する間に，電流計を流れる電流が Δi だけ増加したとし，S_1 を W 側に接続した直後に，コイル A に生じる誘導起電力を V(コイル A を a→b 向き，すなわち i の正の向きに電流を流そうとする向きを正とする)とすると，$V=-\boxed{\text{ウ}}\times\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$ と表される。ここで，$L=\boxed{\text{ウ}}$ とおくと，V は，$V=-L\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$ と表される。この L を，コイル A の自己インダクタンスという。

実際には，コイル A 内に生じる磁場は一様ではなく，外部に漏れ出す磁束も無視できないので，コイル A の自己インダクタンスは，問Ⅱで得た L とは異なる。以下では，このことを考慮した A の自己インダクタンスを L_1 として，L_1 を用いて答えよ。

Ⅲ　S_1 を W 側に接続した直後の電流の時間変化率 $\Delta i/\Delta t$ を，L_1，E を用いて表せ。
　S_1 を W 側に接続した直後の点 d の電位は V_0 であった。

Ⅳ　コイル A を流れる電流が変化すると，コイル B を貫く磁束も変化するため，コイル B にも誘導起電力(相互誘導起電力)が生じる。そこで，コイル A，B の巻き方に注意し，S_1 を W 側に接続した直後の回路の電位について成り立つ式を考えることにより，A，B 間の相互インダクタンス M_1 を，V_0，L_1，E を用いて表せ。

次に，スイッチ S_1 を開いて，電流 i が 0 になったことを確認した後，S_2 を Y 側に接続したまま，S_1 を X 側に接続した。S_1 を X 側に接続した瞬間を改めて時刻 $t=0$ とすると，時刻 t と電流計を流れる電流 i の関係を表すグラフは，図 2―2 と類似した曲線になった。また，S_1 を X 側に接続した直後の点 b の電位は $-V_1(<0)$ であった。

Ⅴ　コイル B の自己インダクタンス L_2 を，V_0，V_1，L_1，E を用いて表せ。

今度は，スイッチ S_1，S_2 を開いて，電流 i が 0 になったことを確認した後，コイル B の中心を図 2―1 の点 p に移す。さらに，スイッチ S_2 を Z 側に接続した後，S_1 を W 側に接続したところ，電流計を流れる電流 i は，やはり図 2―2 と同じような時間変化をし，十分に時間が経過したとき，電流 i は一定値 I_0 であった。コイル B の中心が点 p にあるときの A，B 間の相互インダクタンスを M_2 とする。

Ⅵ　次の文章中の $\boxed{}$ に入る適切な式を書け。ただし，L_1，L_2，M_1，M_2，I_0 のうちから必要なものを用いて答えよ。

S_1 を W 側に接続した瞬間から微小時間 Δt だけ経過する間に，電流計を流れる電流が $\Delta i'$ だけ増加したとする。このとき，A，B にはそれぞれ自己誘導起電力と相互誘導起電力が生じていることに注意すると，回路の電圧について，$E-(\boxed{\text{エ}})\times\dfrac{\Delta i'}{\Delta t}=0$ が成り立つ。ここで，$V'=-(\boxed{\text{エ}})\times\dfrac{\Delta i'}{\Delta t}$ とおくと，$E+V'=0$ と表されることから，V' をコイル A，B に生じる合成誘導起電力とみなせば，$\boxed{\text{エ}}$ は，コイル A，B による合成インダクタンスとみなせる。したがって，S_1 を W 側に接続してから十分に時間が経過したとき，コイル A，B に蓄えられている磁場のエネルギーの和は $\boxed{\text{オ}}$ と表されることがわかる。さらに，この状態から，スイッチ S_1 を W 側に，S_2 を Z 側に接続したまま，外力を加えることにより，コイル B の中心を点 p から点 o までゆっくりと戻す場合について考える。この間，電流の強さは I_0 で一定であるとすると，この間に外力のした仕事は $\boxed{\text{カ}}$ と表される。ただし，重力の影響は無視できるものとする。

▶問題文読解のチェックポイント

☑ 読解量が多いのでリード文や設問文を読み飛ばさないようにしたい。

Ⅰ　求める I_0 は，スイッチを切り替えてから**十分に時間が経過した後**の電流の値である。

Ⅲ，Ⅳ　考えるのは，**S_1 を W 側に接続した直後**についてである。

解　答

Ⅰ　十分に時間が経過したとき，回路を流れる電流は一定なので，コイル A に誘導起電力は生じない。したがって，コイル A と電源を含む閉回路にキルヒホッフの第 2 法則を適用すると

$$E=rI_0 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$\therefore\quad I_0=\boldsymbol{\frac{E}{r}}$$ 答

Ⅱ **ア**　コイル A の単位長さ当たりの巻き数は N/l であるから，この瞬間 A 内に生じている磁束密度の大きさを B とすると

$$B=\boldsymbol{\mu_0\frac{N}{l}i}$$ 答

イ　求める磁束を Φ とすると，Ⅱ**ア**の結果より

$$\Phi=B\cdot\pi R^2=\boldsymbol{\frac{\pi\mu_0R^2Ni}{l}}$$ 答

ウ　この間の磁束の時間変化率を $\Delta\Phi/\Delta t$ とすると，ファラデーの電磁誘導の法則より，コイル A 一巻き当たりに生じる誘導起電力は $-\Delta\Phi/\Delta t$ である。ここでは，N 巻きコイルについて考えているので，求める誘導起電力 V は，Ⅱ**イ**の結果より

$$V=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\boldsymbol{-\frac{\pi\mu_0R^2N^2}{l}\times\frac{\Delta i}{\Delta t}}$$ 答

Ⅲ　電源とコイル A を含む閉回路にキルヒホッフの第 2 法則を適用すると

$$E-L_1\frac{\Delta i}{\Delta t}=ri \quad \cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$t=0$ の瞬間，$i=0$ であるから

$$E-L_1\frac{\Delta i}{\Delta t}=r\cdot0 \qquad \therefore\quad \frac{\Delta i}{\Delta t}=\boldsymbol{\frac{E}{L_1}} \quad \text{答} \quad \cdots\cdots\text{③}$$

Ⅳ　S_1 を W 側に接続した直後，A を a→b 向きに流れる電流が増加するので，b→a 向きに電流を流そうとする自己誘導起電力が生じる。一方，このとき，B 内を下向きに貫く磁束線が増加するので，B には，c→d 向きに電流を流そうとする相互誘導起電力が生じる(右上図参照)。また，この瞬間，点 d の電位は V_0 であるから

答案作成のポイント

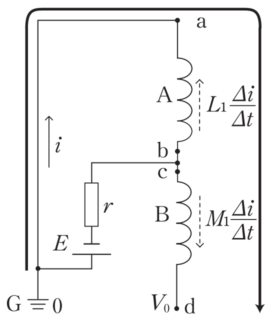
◀ Ⅱ**イ**で求めた

$$\Phi=\frac{\pi\mu_0R^2Ni}{l}$$

の右辺のうち，時間的に変化するのは i のみである。なお，これより，A の自己インダクタンス L は

$$L=\frac{\pi\mu_0R^2N^2}{l}$$

◀ なお，①は，②で $\Delta i/\Delta t=0$，$i=I_0$ の場合に相当する。



上図の破線の矢印は，その向きに電流を流そうとする誘導起電力がコイルに生じていることを表す。以下同様。

◀ なお，点 G から，電源(とその内部抵抗)，点 c，コイル B，点 d に沿って電位の変化を考えると，次の式が得られる。

$$V_0-0=-E+r\cdot0+M_1\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

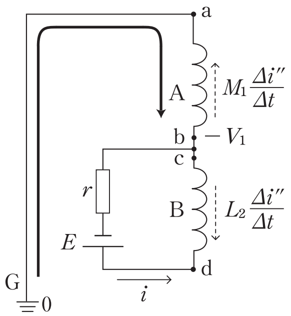
上式と③より考えてもよい。

$$V_0-0=-L_1\frac{\Delta i}{\Delta t}+M_1\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

上式に③を代入して整理すると

$$V_0=(M_1-L_1)\times\frac{E}{L_1}$$

$$\therefore\quad M_1=\boldsymbol{\frac{L_1(V_0+E)}{E}}\quad \text{答}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$



V　スイッチ S_1 を X 側に閉じた直後，コイル B を d→c 向きに流れる電流が増加するので，c→d 向きに電流を流そうとする自己誘導起電力が生じる。一方，このとき，A 内を下向きに貫く磁束線が増加するので，A には，b→a 向きに電流を流そうとする相互誘導起電力が生じる(右図参照)。この瞬間，点 b の電位は $-V_1$ であるから，電流の時間変化率を $\Delta i''/\Delta t$ とすると

$$-V_1-0=-M_1\frac{\Delta i''}{\Delta t}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，この瞬間，$i=0$ とみなせるので，電源と B を含む閉回路にキルヒホッフの第 2 法則を適用すると(右上図参照)

$$E-L_2\frac{\Delta i''}{\Delta t}=r\cdot 0\qquad\therefore\quad\frac{\Delta i''}{\Delta t}=\frac{E}{L_2}$$

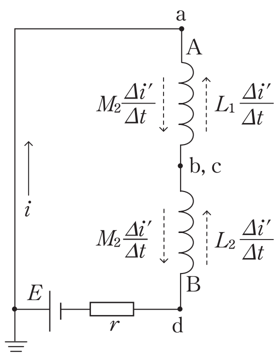
上式を，⑤に代入して，④を用いると

$$V_1=M_1\frac{E}{L_2}$$

$$\therefore\quad L_2=\frac{M_1E}{V_1}=\boldsymbol{\frac{L_1(V_0+E)}{V_1}}\quad \text{答}$$

Ⅵ**エ**　まず，自己誘導起電力について考える。S_1 を W 側に接続した直後，A を a→b 向きに，B を c→d 向きに流れる電流が増加する。このため，A，B にはそれぞれ b→a 向き，d→c 向きに電流を流そうとする自己誘導起電力が生じる(右図参照)。

次に，相互誘導起電力について考える。このとき，A を流れる電流の変化により，B 内を下向きに貫く磁束線が増加するので，B には，B 内を上向きに貫く磁束線が生じる向き，つまり，c→d 向きに電流を流そうとする向きの相互誘導起電力が生じる。一方，このとき B を流れる電流の変化により，A 内を上向きに貫く磁束線が増加するので，A には A 内を下向きに貫く磁束線を生じる向き，つまり，a→b 向きに電流を流そうとする相互誘導起電力が生じる(右図参照)。



以上の考察，および，この瞬間，$i=0$ とみなせることより，電源とコイル A，B を含む閉回路にキルヒホッフの第 2 法則を

適用すると，次の式が得られる。

$$E-L_1\frac{\Delta i'}{\Delta t}+M_2\frac{\Delta i'}{\Delta t}-L_2\frac{\Delta i'}{\Delta t}+M_2\frac{\Delta i'}{\Delta t}=r\cdot 0$$

$$\therefore\quad E-(\boldsymbol{L_1+L_2-2M_2})\times\frac{\Delta i'}{\Delta t}=0$$ 答

オ　自己インダクタンス L のコイルに電流 I_0 が流れているとき，コイルに蓄えられている磁場のエネルギー U は

$$U=\frac{1}{2}LI_0{}^2$$

ここで，コイル A，B の合成インダクタンスは，Ⅵ**エ**の結果からわかるように，$L_1+L_2-2M_2$ とみなせるから，求めるエネルギーを U' とすると

$$U'=\boldsymbol{\frac{1}{2}(L_1+L_2-2M_2)I_0{}^2}$$ 答

カ　B の中心が点 o にあるとき，A，B の位置関係はⅣと同じであることに注意すれば，この状況は，Ⅵ**エ**の状況で，M_2 を M_1 に置き換えた状況に等しい。つまり，この場合の合成インダクタンスは $L_1+L_2-2M_1$ であることがわかる。また，コイル B の中心を点 p から点 o に戻す間，コイルを流れる電流は強さ I_0 で一定なので，コイル B の中心が点 o にあるとき，コイルに蓄えられている磁場のエネルギーを U'' とすると

$$U''=\frac{1}{2}(L_1+L_2-2M_1)I_0{}^2$$

ここで，エネルギー保存則より，外力のする仕事 W は，コイルに蓄えられている磁場のエネルギーの変化量 $U''-U'$ に等しい。したがって，求める仕事を W とすると

$$\begin{aligned}W&=U''-U'\\&=\frac{1}{2}(L_1+L_2-2M_1)I_0{}^2-\frac{1}{2}(L_1+L_2-2M_2)I_0{}^2\\&=\boldsymbol{(M_2-M_1)I_0{}^2}\end{aligned}$$ 答

解　説

Ⅴ，Ⅵ　一般に，2つのコイルA，Bの間に生じる相互誘導起電力について，コイルAを流れる電流の変化によってコイルBに生じる相互誘導の相互インダクタンスと，コイルBを流れる電流の変化によってコイルAに生じる相互誘導の相互インダクタンスとは等しい。これを，相互インダクタンスの相反定理という。

☑ 解法・思考のステップ

この定理が知識として問われることはないと思われるが，知っていれば，検算などにつかうことができる。

採点基準

配点 20点

Ⅰ　2点　　Ⅱ　4点　　Ⅲ　3点　　Ⅳ　2点　　Ⅴ　3点　　Ⅵ　6点

配点のめやす　**（各記号の定義は解答参照）**

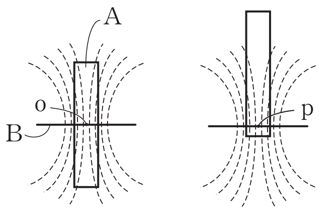
Ⅰ　キルヒホッフの第2法則を適用できて …… **1点**
　結論に …… **1点**
Ⅱ　**ア**を求めて …… **1点**
　イを求めて …… **1点**
　ウを求めて …… **2点**
Ⅲ　キルヒホッフの第2法則を適用できて …… **1点**
　$t=0$ の瞬間，$i=0$ であるという考え方に …… **1点**
　結論に …… **1点**
Ⅳ　A，Bを含む部分の電位変化の関係式がわかって …… **1点**
　結論に …… **1点**
Ⅴ　Aを含む部分の電位変化の関係式がわかって …… **1点**
　電源とBを含む閉回路にキルヒホッフの第2法則を適用できて …… **1点**
　結論に …… **1点**
Ⅵ　**エ**，**オ**，**カ**を求めて …… **各2点**

プラスα

M_1 と M_2 の違いについて

問題では，Aを固定して，Bの位置を点o，p間で動かしたが，ここでは，簡単に考えるために，Bに対してAが動いたと考えて，Bを流れる電流のつくる磁場による，A内の磁束線の様子を考える。

Bの中心が点o，pに一致する場合について，Aを貫く磁束線の様子はそれぞれ右図のように表される。このように，この2つの場合では，A内を貫く磁束線が異なる。このため，Bの中心の位置によって，相互インダクタンスも異なるのである。



上図の破線は，Bを流れる電流がつくる磁束線を表す。