必修テーマ

物理の「お約束」

学習時間 30分

XQAR1A-Z1J1-01

到達目標

「なめらか」,「小物体」,「静かに放す」などの物理の問題で頻出の各表現について，その意味を理解し，問題を解くための適切な考察ができるようになる。

物理のお約束　1

例題 1

図1－1のように，ひとつながりの**なめらか**な斜面と**なめらか**な水平面がある。初め，水平面上の点Aに**小物体**aが静止している。斜面上で水平面からの高さがhの点Bで**小物体**bを**静かに放した**ところ，**小物体**bは斜面を滑り降り，時刻 $t=0$ に，点Aから距離Lだけ離れた水平面上の点Cを通過し，その後，**小物体**bは**小物体**aと衝突した。重力加速度の大きさをgとして，以下の設問に答えよ。

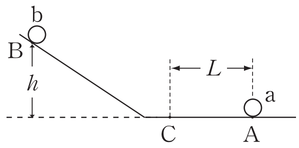


図1－1

問1　点Cを通過した瞬間の**小物体**bの速さv_Cを求めよ。

問2　**小物体**bが**小物体**aに衝突する時刻を，v_Cを用いて表せ。

解　答

問1　bの質量をmとし，水平面を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m\cdot v_C{}^2+mg\cdot 0=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgh$$

$$\therefore\quad v_C=\sqrt{2gh}\quad \boxed{答}$$

問2　水平面は**なめらか**である。よって，求める時刻をTとすると，等速度運動の式より

$$v_CT=L$$

$$\therefore\quad T=\frac{L}{v_C}\quad \boxed{答}$$

◀ **お約束1－1**
斜面と水平面はともに**なめらか**なので，bの力学的エネルギーは，bを放してからaとbが衝突するまでの間，保存される。

◀ **お約束1－3**

◀ **お約束1－1**

◀ **お約束1－2**
aとbはいずれも**小物体**なので，点Cを通過してからaに衝突するまでにbが移動する距離は，CA間の距離Lに等しい。

解　説

問1，問2　bは斜面や水平面に沿って運動するとき，斜面や水平面から非保存力である垂直抗力を受ける。しかし，この垂直抗力は，bの運動の向きと直交するので，bに仕事をしない。したがって，aに衝突するまでbの力学的エネルギーは保存され，点Cを通過してからaに衝突するまでのbの運動は，速さv_Cの等速度運動である。

チェックポイント

お約束１－１：　なめらか（滑らか），粗い（あらい）

なめらか（**滑らか**）は，力学の問題で目にすることが多い。その意味は，**摩擦がない**というものである。現実では，摩擦ゼロの物体（面）どうしの接触はない。しかし，摩擦によるエネルギーの損失や減速が無視できる程度の空間的・時間的なスケールでは，摩擦がないものとして考える場合がある。そこで，たとえばエネルギー保存等を考えさせたい問題では，「**なめらか**な面」などと設定することが多い。現実では，摩擦は接触する２物体の組合せで決まるが，「**なめらか**な面」はいかなる物体との間にも摩擦を生じないものと考えてよい。

さらに，空気などの摩擦については，問題文でとくに断りのない限り，無視してよい。

ところで，なめらか（滑らか）とは逆の意味で，「**粗い**（**あらい**）」という表現が用いられる。「**粗い**面」は，物体と接触したときに物体との間に摩擦が生じる面である。

お約束１－２：　小物体

小物体や**小球**は，力学の問題で目にすることが多い。ここでいう「小」とは，**大きさが無視できる**という意味である。同じ意味の表現として，「**小さな物体**」などがある。また，同様の表現として，「細い棒」などの「**細い**」（**太さが無視できる**という意味）などもある。

現実の物体は大きさをもち，その運動を考える場合は，重心の並進運動とともに重心まわりの回転も考慮する必要がある。

たとえば，図１－２のように粗い斜面上でボールを放すと，現実には，ボールは回転しながら斜面に沿って運動する。この場合，ボールがもっている重力による位置エネルギーは，並進運動の運動エネルギー，摩擦による熱エネルギー，そして回転のエネルギーに転換される。

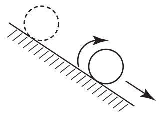


図１－２

このように，現実世界の運動を解析する場合，物体の回転を考慮する必要がある。しかし，高校物理では，大きさをもつ物体（剛体）の回転運動を考慮しなくてもいいように，「**小物体**」，「**小球**」などの表現が用いられる。

また，（大きさをもつ）現実の物体の場合，各物体の置かれた位置どうしの距離と，物体間の最短距離は，等しいとは限らない（図１－３参照）。しかし，大きさが無視できる場合，これらは等しいとみなせる。

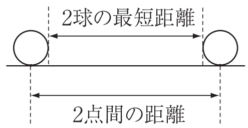


図１－３

お約束１－３：　静かに放す

静かに放すとは，**初速度ゼロで運動させる**という意味である。たとえば，図１－４が与えられ，「なめらかな斜面上の点Ａで小球を静かに放した」という記述があれば，小球は，放された直後から，初速度の大きさ０，加速度の大きさ $g\sin\theta$ で等加速度運動する（ただし g は重力加速度の大きさ）。

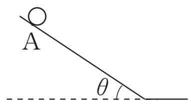


図１－４

物理のお約束　2

例題2

図２－１のように，大気中で軸が鉛直な断面積 S で断熱性をもつ円筒容器内に，熱を通さない**軽い**ピストンを用いて単原子分子理想気体を封入した。ただし，ピストンには，ばね定数 k の**軽い**ばねの一端が取り付けられており，ばねの他端は天井に取り付けられている。この状態では，容器内の絶対温度は大気の絶対温度 T_0 に等しく，容器の底からピストンの下面までの距離は L_0，ばねは自然長であった。

初めの状態から，容器内の温度調整器で**ゆっくり**と容器内の温度を上げて，容器の底とピストンの下面の距離が $2L_0$ になるまで，ピストンを上昇させた。容器は床に固定されているものとして，以下の設問に答えよ。ただし，必要であれば，重力加速度の大きさを g，大気圧を P_0 とせよ。

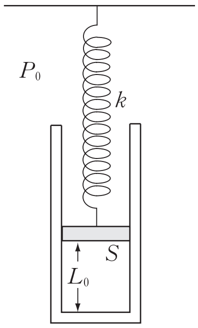


図２－１

問１　容器の底とピストンの下面までの距離が $L\,(L_0 \leqq L \leqq 2L_0)$ のときの容器内の圧力を求めよ。

問２　容器の底とピストンの距離が $2L_0$ になるまでに，容器内の気体がした仕事を求めよ。

問３　**問２**の間の，容器内の気体の内部エネルギーの**変化量**を求めよ。

問４　**問２**の間に容器内の気体が**吸収した熱量**を求めよ。

解　答

問１　容器内の温度は**ゆっくり**と変化するので，ピストンが受ける力はつねにつり合っているとみなせる。よって，求める圧力を P とすると，ピストンが受ける力のつり合いを表す式は

$$P_0S + k(L - L_0) = PS \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore \quad P = \frac{\boldsymbol{P_0S + k(L - L_0)}}{\boldsymbol{S}}$$ 答

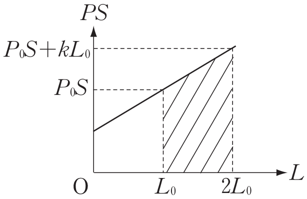
◀このときピストンが受ける力には，大気が押す力（鉛直下向きで大きさ P_0S），ばねの弾性力（鉛直下向きで大きさ $k(L-L_0)$），および容器内の気体が押す力（鉛直上向きで大きさ PS）がある。

問２　①より，容器内の気体がピストンを押す力の大きさ PS と L の関係は，右図の太い実線のように表され，L が L_0 から $2L_0$ に変化する間にピストンにする仕事（W とする）は，右図の斜線部分の面積に等しい。よって，W は

$$W = \frac{1}{2}\{P_0S + (P_0S + kL_0)\}\cdot(2L_0 - L_0)$$

$$= \frac{\boldsymbol{L_0(2P_0S + kL_0)}}{\boldsymbol{2}}$$ 答

◀ **お約束２－２**



問３　**問１**の結果より，容器の底とピストンの距離が L_0，$2L_0$ のときの気体の圧力は，それぞれ

$$L_0:\quad P_0,\qquad 2L_0:\quad P_0+\frac{kL_0}{S}$$

よって，内部エネルギーの**変化量**を ΔU とすると

$$\Delta U=\frac{3}{2}\left(P_0+\frac{kL_0}{S}\right)S\cdot 2L_0-\frac{3}{2}P_0SL_0$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}\left(P_0+\frac{2kL_0}{S}\right)SL_0}\quad \text{答}$$

問４　**問２**，**問３**の結果，および熱力学の第１法則より，**気体が吸収した熱量**を Q とすると

$$Q=\Delta U+W=\frac{3}{2}\left(P_0+\frac{2kL_0}{S}\right)SL_0+\frac{L_0(2P_0S+kL_0)}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{5}{2}P_0SL_0+\frac{7}{2}kL_0^2}\quad \text{答}$$

◀ **お約束２－３**

◀ 単原子分子理想気体の内部エネルギーは

$\frac{3}{2}\times$[圧力]$\times$[体積]

と表すことができる。

◀ **お約束２－４**

チェックポイント

お約束２－１：　軽い

軽いは，**質量が無視できる**という意味である。実験装置の部品（部分）すべての質量を考慮すると，計算量が膨大になる。そこで，実験に用いるいくつかの部品（例題２ではピストン）は質量を０とみなして計算する（させる）場合が多い。その際，問題文で**軽い**という表現を用いる。

たとえば，図２－２のように，２物体Ａ，Ｂが鉛直方向に張った糸でつながれている場合，「物体Ａ，Ｂを**軽い**糸でつなぐ」などといった記述があれば，糸の質量は無視して考察する。この場合には，糸の張力の大きさは糸のどの点でも等しいので，Ａが糸から引かれる力の大きさと，Ｂが糸から引かれる力の大きさは等しい。しかし，仮に糸の質量が無視できないならば，Ａが糸に引かれる力の大きさとＢが糸に引かれる力の大きさは異なる。

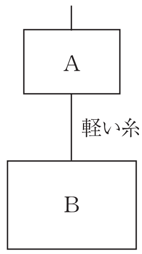


図２－２

お約束２－２：　ゆっくり

ゆっくりという表現は，熱力学や，力学，電磁気のさまざまな場面で目にするだろう。その意味は，**変化の最中でもつり合いが保たれている**というものである。また，「物体がゆっくり動く」という場面では，物体の運動エネルギー（速さ）は０とみなせる。

お約束２－３：　変化量

変化量とは，**[変化後の量]－[変化前の量]** のことである。必ずしも正の値であるとは限らないことに注意してほしい。大きい方の値から小さい方の値を引いてしまうというミスが起こりがちである。

お約束２－４：　気体の吸収した熱量，気体のした仕事

気体の吸収した熱量や**気体のした仕事**といった熱力学で頻出の表現は，それぞれ

[気体の吸収した熱量]＝－[気体が放出した熱量]

[気体がした仕事]＝－[気体がされた仕事]

というように，符号と日本語として逆の表現を組み合わせて表される。問題によって与えられ方（表現）が違うので注意が必要。

物理のお約束　3

例題3

図3－1のように，抵抗値Rの抵抗器，自己インダクタンスLのコイル，電気容量Cのコンデンサー，起電力Eの電池，およびスイッチからなる回路について考える。初め，スイッチは開いており，コンデンサーに電荷は蓄えられていないものとする。

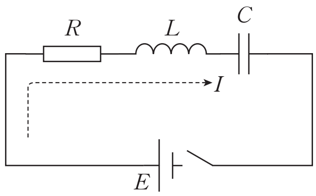


図3－1

問1　初めの状態からスイッチを閉じた後，回路を流れる電流がIの瞬間について，図の回路にキルヒホッフの第2法則を適用した式を書け。ただし，電流は図の**矢印の向きを正**とし，電流の変化率をdI/dt，コンデンサーの左側の極板が帯びている電荷をQとする。

問2　スイッチを閉じてから**十分に時間がたった状態**における，回路を流れる電流I_∞，およびコンデンサーの左側の極板が帯びている電荷Q_∞の値をそれぞれ求めよ。

解　答

問1　定義された電流の正の向きに回路を1周するとき，電池，およびコイルに生じている起電力の値はそれぞれE，および$-L(dI/dt)$と表される。また，コンデンサー，および抵抗器では電位降下が生じており，それらの値はそれぞれ，Q/C，およびRIである。よって，求める式は

$$\boldsymbol{E-L\frac{dI}{dt}=\frac{Q}{C}+RI}$$ 答

◀ お約束3－1

◀ ［起電力の和］＝［電位降下の和］

問2　スイッチを閉じてから**十分に時間が経過**すると，コンデンサーの充電が完了し，回路に電流は流れなくなる。よって

$$I_\infty=\boldsymbol{0}\quad\left(\frac{dI}{dt}=0\right)$$ 答

◀ お約束3－2

このことと，**問1**の結果より

$$E-L\cdot 0=\frac{Q_\infty}{C}+R\cdot 0$$

$$\therefore\quad Q_\infty=\boldsymbol{CE}$$ 答

チェックポイント

お約束３－１：　電流の向き

物理量には，向きに注意するべきものがある。また，それらについては，ある向きを正と定義したとき，定義された向きと逆向きの値は負となる。

物理量の向きや符号は，力学的な量（速度，加速度，力など）については問題を解く際に比較的意識できているだろう。しかし，電流の向きについては，意識せずに問題を解き進める人が多い。難度の高い回路の問題では，電流の正の向きを強く意識していないと，キルヒホッフの第２法則の式など回路の考察に必要な式を立てる際に致命的なミスを犯しかねない。ここで，**例題３**の状況について確認しておこう。

- **電源**…電源を流れる電流の値に関係なく，正極側が負極側に対して電位が E だけ高くなるような起電力を生じている。
- **抵抗器**…抵抗器を流れる電流 I の正の向きに，電位降下 RI が生じる。
- **コイル**…電流が流れ出る側の端は，電流が流れ込む側の端に対して $-L(dI/dt)$ だけ電位が高い。言い換えると，この瞬間のコイルは，電流が流れ出る側を正極とする起電力 $-L(dI/dt)$ の電源とみなすことができる。
- **コンデンサー**…電流 I が流れ込む側の極板が帯びている電荷の量を Q とすると，電流 I の正の向きに，電位降下 Q/C が生じる。

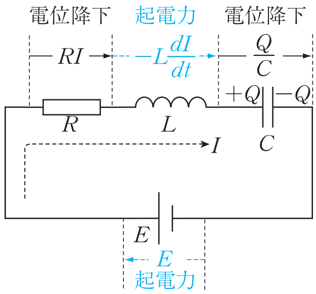


図３－２

以上の結果をまとめると，**例題３**の**問１**の結果が得られる。

ところで，「**解答**」**問１**左辺にあるコイルの誘導起電力の項を移項すると，次の式が得られる。

$$E=\frac{Q}{C}+RI+L\frac{dI}{dt}$$

この式では「コイルで $L(dI/dt)$ だけ電位降下が生じている」と解釈できるが，これも正しい。上の下線部は，電流が流れ出る側の端は，電流が流れ込む側の端に対して $\boldsymbol{L(dI/dt)}$ だけ電位が**低い**と言い換えられるからである。

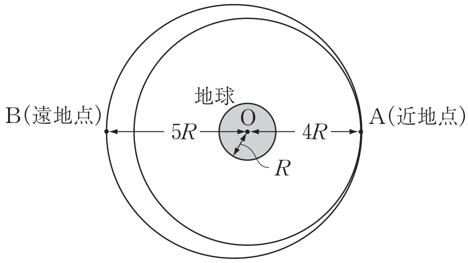
お約束３－２：　十分に時間がたつ

物理の問題では，ある操作をしてから十分に時間がたったときの系の状態について問われることがある。この類の問題では，定性的な理解と定量的な計算の両方が必要となる場合が多く，比較的難度は高い。**例題３**の**問２**では，「十分に時間がたつと，図３－１の回路ではコンデンサーの充電が完了し，回路に電流が流れなくなるはずだ」という定性的な理解（考察）と，これを踏まえ**問１**の結果を用いた計算が必要である。

記述力・考察力確認問題

問　題

地球を半径 R の一様な球とする。地球の中心Oを中心とする半径 $4R$ の円軌道上を，質量 m の人工衛星Pが等速円運動している。いま，この人工衛星Pが，軌道上の一点Aで瞬間的に燃料を噴射することにより，速さを増した。以後，人工衛星Pは点Aを近地点（軌道上で最も地球に近い点），地球の中心Oから距離 $5R$ の点Bを遠地点（軌道上で最も地球から遠い点）とする楕円軌道上を運動するようになった。



地表での重力加速度の大きさを g として，以下の問いの答を m，g，R の中から必要な文字を用いて表せ。**ただし，速さは地球に対する値とし，地球の自転の影響，大気との摩擦，他の天体の影響，消費した燃料の質量などは考えなくてよい。**

問１　地球の中心Oから距離 $4R$ 離れた点での重力加速度の大きさを求めよ。

問２　人工衛星Pが半径 $4R$ の円運動をしているときの速さを求めよ。

問３　半径 $4R$ の円運動をしているときの人工衛星Pの力学的エネルギーは，地表に静止しているときの人工衛星Pの力学的エネルギーよりどれだけ大きいか。

問４　楕円軌道上を運動している人工衛星Pの，近地点Aでの速さ v_A，および遠地点Bでの速さ v_B をそれぞれ求めよ。

解　答

問１　万有引力定数を G，地球の質量を M，求める重力加速度の大きさを g' とすると

$$mg = \frac{GMm}{R^2}, \qquad mg' = \frac{GMm}{(4R)^2}$$

$$\therefore \quad g' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\boldsymbol{g}$$ 答

問２　求める速さを v_0 とすると，Pの円運動の運動方程式は

$$m\cdot\frac{v_0{}^2}{4R} = mg' = m\cdot\frac{1}{16}g \qquad \therefore \quad v_0 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\boldsymbol{gR}}$$ 答

問３　地球の中心Oから距離 r の点でのPの重力による位置エネルギーを，無限遠を基準として $U(r)$ とすると

お約束１－２
問題文の太字部分から，**Pが受ける力は，地球からの重力（万有引力）のみとみなせる**ことを読み取る必要がある。

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{R^2}\cdot\frac{R^2}{r}=-mg\cdot\frac{R^2}{r}$$

上式と**問２**の結果より，求める量は

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+U(4R)-\left(\frac{1}{2}m\cdot 0^2+U(R)\right)=\boldsymbol{\frac{7}{8}mgR}$$ 答

◀指定された文字のみで答を表すことを目標に式変形をする。

問４　ケプラーの第２法則より

$$\frac{1}{2}\cdot 4R\cdot v_A=\frac{1}{2}\cdot 5R\cdot v_B$$

◀左辺は近地点での面積速度，右辺は遠地点での面積速度である。

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2+U(4R)=\frac{1}{2}m{v_B}^2+U(5R)$$

これらの式より

$$v_A=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10gR}}{6}},\qquad v_B=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10gR}}{15}}$$ 答

答案作成時の注意

本問では，問題（リード文）中に「m，g，R の中から必要な文字を用いて表せ」とある。文字指定がある場合，指示に従わないと減点される可能性が高いので注意が必要。

また，文字の指定が出題者のメッセージを含む場合もある。本問からは，地球の質量や万有引力定数の具体的な値が未知であっても，地表での重力加速度の大きさや地球の半径といった比較的測定しやすい物理量のみで，さまざまな興味深い物理量の値を求めることができるということがわかる。