添削問題解答解説

物理　直前3

YQAFXK-11C1-01

1 問題

《斜面との繰り返し衝突》

図1のように，水平となす角度が45°で右下がりの斜面と，なめらかな水平面が，点Aでつながっている。質量mの小球が水平面上を速さuで滑ってきて，点Aで水平右向きに飛び出した。その後，小球は，斜面との衝突を繰り返しながら降下していった。斜面はなめらかで，小球と斜面との衝突は弾性衝突であるとする。重力加速度の大きさをgとして，以下の設問に答えよ。

Ⅰ　小球が点Aを飛び出してから第1回目の衝突点P_1に達するまでの時間t_1，点Aと点P_1の距離s_1，点P_1に衝突する直前の小球の速度の鉛直成分の大きさv_1，および，小球が点P_1で衝突する際に斜面から受ける力積の大きさI_1をそれぞれ求めよ。

Ⅱ　第1回目の衝突点P_1と第2回目の衝突点P_2との距離s_2を，s_1を用いて表せ。また，第2回目の衝突点P_2と第3回目の衝突点P_3との距離s_3を，s_1を用いて表せ。さらに，以上の結果を踏まえて，点Aから第n回目の衝突点P_nまでの距離S_nを表す式を推察し，S_nを，s_1，nを用いて表せ。ただし，$n=1$，2，3，… とする。

Ⅲ　小球がAを飛び出してから問Ⅰの第1回目の衝突(点P_1での衝突)が起こるまでの過程を利用して，自動車が水平面を速さUで走ってきて点Aから飛び出した後，点P_1で斜面に(第1回目の)衝突をしてしまった，という映画の場面をトリック撮影することを考えよう。そのために，実物の1/25倍の大きさの模型自動車，および斜面を用いるものとする。模型自動車が飛び出す様子が，実物を撮影したときと同じように映写されるための条件について考える。

(1)　単位時間当たりについて，撮影時のコマ数は，映写時のコマ数の何倍にすればよいかを求めよ。

(2)　模型の自動車がAから飛び出す瞬間の速さuは，実物の自動車の速さUの何倍にすればよいかを求めよ。

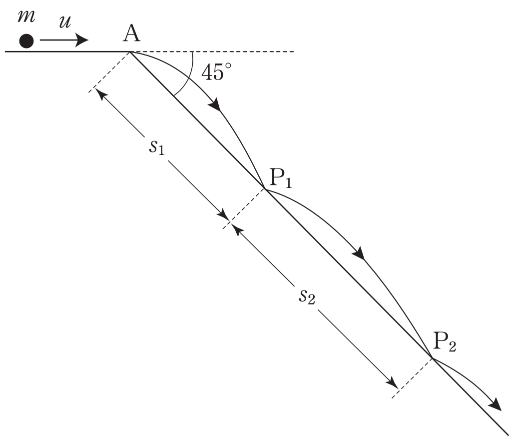


図 1

▶問題文読解のチェックポイント

☑ 設問によっては，複数の物理量を答える必要がある。

Ⅰ　t_1，s_1，v_1，I_1 の 4 つの物理量を答えなければならない。

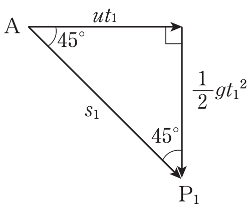
Ⅱ　s_2，s_3，S_n の 3 つの距離について答えなければならない。

Ⅲ　まずは，コマ数が何を意味するかについて考えよう。

解　答

答案作成のポイント

Ⅰ　この間の小球の水平方向の運動は速さ u の等速度運動，鉛直方向の運動は自由落下なので，A を飛び出してから P_1 に達するまでの間の小球の変位の図は，右のようになる。したがって



$$ut_1=\frac{1}{2}gt_1^2 \qquad \therefore\ t_1=\boldsymbol{\frac{2u}{g}}$$ 答

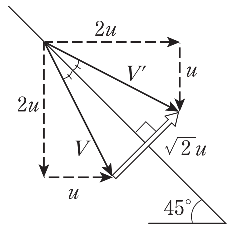
また，s_1，v_1 については，それぞれ

$$s_1=\sqrt{2}\cdot ut_1=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}\,u^2}{g}}$$ 答

$$v_1=gt_1=\boldsymbol{2u}$$ 答

◀等加速度運動の式を用いた。

ところで，なめらかな面との弾性衝突では，小球の速度が衝突面となす角度の大きさは，衝突の前後で変わらない(反射の法則を満たす方向へとはね返る)。このため，衝突直前，直後の速度をそれぞれ V，V' とすると，1 回目の衝突の直前，直後の速度の様子を表すベクトル図は右図のようになり，この間の速度の変化量の大きさは $\sqrt{2}\,u$ である。したがって，衝突の際に小球が受けた力積の大きさ I_1 は

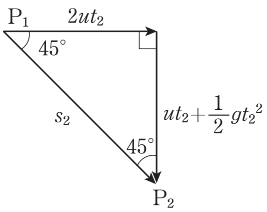


$$I_1=m\cdot\sqrt{2}\,u=\boldsymbol{\sqrt{2}\,mu}$$ 答

◀V' は斜面に関して V と対称である。このことと，斜面と水平面のなす角度が 45° であることを考慮すると，衝突により，小球の速度の水平成分と鉛直成分の大きさは入れ替わることがわかる。

◀運動量の原理：
　［運動量の変化量］
　　　＝［受けた力積］

Ⅱ　Ⅰでの考察より，1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの間の小球の水平方向の運動は，速さ $2u$ の等速度運動，鉛直方向の運動は，大きさ u の初速度の鉛直投げ下ろし運動なので，この間の時間を t_2 とすると，小球の変位の図は右のようになる。したがって



$$2ut_2=ut_2+\frac{1}{2}gt_2^2 \qquad \therefore\ t_2=\frac{2u}{g}(=t_1)$$

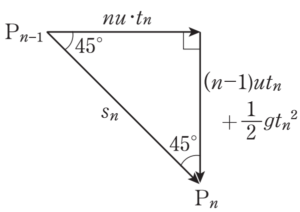
$$\therefore\ s_2=\sqrt{2}\times 2ut_2=2\sqrt{2}\,ut_1$$
$$=\boldsymbol{2s_1}$$ 答

◀Ⅰの考察で得た
　$s_1=\sqrt{2}\,ut_1$
を用いた。

ここで，2 回目の衝突直前の小球の速度の鉛直成分の大きさを v_2 とすると

$$v_2=u+gt_2=3u$$

◀等加速度運動の式を用いた。



また，Ⅰで考えたように，衝突により，小球の速度の水平成分と鉛直成分の大きさが入れ替わるので，2 回目の衝突直後の小球の速度の水平成分の大きさは $3u$，鉛直成分の大きさは $2u$ である。ゆえに，2 回目の衝突から 3 回目の衝突までの時間を t_3 として，

t_1，t_2 を求めるときと同様にベクトル図を考えれば

$$3ut_3=2ut_3+\frac{1}{2}gt_3{}^2 \qquad \therefore\ \ t_3=\frac{2u}{g}(=t_1)$$

$$\therefore\ \ s_3=\sqrt{2}\times 3ut_3=3\sqrt{2}\,ut_1$$
$$=\boldsymbol{3s_1}\quad \boxed{答}$$

以上より，$(n-1)$ 回目の衝突点から n 回目の衝突点までの距離を s_n とすると，$s_n=ns_1$ と表されると推察できるので，S_n は

$$S_n=s_1+s_2+\cdots+s_n=(1+2+\cdots+n)s_1$$
$$=\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}s_1}\quad \boxed{答}$$

◀ $(n-1)$ 回目の(点 P_{n-1} での)衝突直後の速度の水平成分の大きさは nu，鉛直成分の大きさは $(n-1)u$ であると推察できるので，$(n-1)$ 回目の衝突から n 回目の(点 P_n での)衝突までの変位についてのベクトル図は，前ページ欄外下図のようになる。この間の時間を t_n とすると

$$nu\cdot t_n=(n-1)u\cdot t_n+\frac{1}{2}gt_n{}^2$$
$$\therefore\ \ t_n=\frac{2u}{g}(=t_1)$$

よって，$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ 間の距離 s_n は

$$s_n=\sqrt{2}\times nu\cdot t_n=n\cdot\sqrt{2}\,ut_1$$
$$=ns_1$$

◀ 等差数列の和の公式

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

を用いた。

Ⅲ　以下では，実物に関する量を大文字で，模型に関する量を小文字で表すものとする。

(1)　衝突点までの落下時間をそれぞれ T，t，落下距離をそれぞれ H，h とすると，等加速度運動の式より

$$H=\frac{1}{2}gT^2, \qquad h=\frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore\ \ \frac{h}{H}=\frac{1}{25}=\frac{t^2}{T^2} \qquad \therefore\ \ t=\frac{1}{5}T$$

したがって，撮影時のコマとコマの間の時間間隔は，映写時の 1/5 にすればよい。そのためには，撮影時の単位時間当たりのコマ数を，映写時の

5 倍　$\boxed{答}$

にすればよい。

◀ 単位時間当たりのコマ数は，コマとコマの時間間隔の逆数で与えられる。

(2)　水平方向の飛距離をそれぞれ X，x とすると

$$X=UT, \qquad x=ut$$

$$\therefore\ \ \frac{x}{X}=\frac{ut}{UT}=\frac{u}{U}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25} \qquad \therefore\ \ \frac{u}{U}=\frac{1}{5}$$

ゆえに，模型の自動車の速さ u は，実物の自動車の速さ U の

$\boldsymbol{\frac{1}{5}}$ **倍**　$\boxed{答}$

にすればよい。

◀ Ⅲ(1)の結果より得られる

$$\frac{t}{T}=\frac{1}{5}$$

を用いた。

解　説

Ⅰ　物体と面との衝突が，なめらかで弾性的な場合には，“反射の法則”が成り立つ。なぜなら，斜面がなめらかなことから，衝突の直前直後で速度の接線方向成分が不変，衝突が弾性的なことから法線方向成分が同大で逆向き，であるからである。

さて，「**解答**」に示したように，“反射の法則”を速度の鉛直成分と水平成分に分けて考えると，衝突により，速度の鉛直成分の大きさは水平成分の大きさに，水平成分の大きさは鉛直成分の大きさに，互いに入れ替わることがわかる。このことに気づくと，この問題は，グッと解きやすくなる。

また，「**解答**」のような図を描いてみれば，衝突により，速度 V が V' になるときの速度の変化量の大きさが $\sqrt{2}u$ であることは一目でわかるが，これを計算でやろうとすると手間がかかる。図形的考察の便利さを味わってほしい。あとは，運動量の原理([運動量の変化量]＝[受けた力積] の関係)から，簡単に力積が求められる。

☑ 解法・思考のステップ

「なめらかで弾性的」という言葉(表現)に注意しなければならない。

採点基準

配点 20点

Ⅰ　7点　　Ⅱ　6点　　Ⅲ(1)　4点　　(2)　3点

配点のめやす　**(各記号の定義は解答参照)**

Ⅰ　t_1 を求めて …… **1点**

$s_1=\sqrt{2}\cdot ut_1$ がわかって …… **1点**

s_1 を求めて …… **1点**

v_1 を求めて …… **1点**

衝突前後で速度の水平成分と鉛直成分が入れ替わることがわかって …… **1点**

I_1 が衝突の前後での運動量の変化量の大きさに等しいことがわかって …… **1点**

I_1 を求めて …… **1点**

Ⅱ　$s_2=\sqrt{2}\cdot 2ut_2$ がわかって …… **1点**

s_2 を求めて …… **1点**

$s_3=\sqrt{2}\cdot 3ut_3$ がわかって …… **1点**

s_3 を求めて …… **1点**

$s_n=ns_1$ がわかって …… **1点**

S_n を求めて …… **1点**

Ⅲ(1)　$H=\dfrac{1}{2}gT^2$，$h=\dfrac{1}{2}gt^2$ の考え方に …… **1点**

$\dfrac{h}{H}=\dfrac{1}{25}$ がわかって …… **1点**

$t=\dfrac{T}{5}$ がわかって …… **1点**

結論に …… **1点**

(2) $X=UT$，$x=ut$ の考え方に …… **1点**

$\dfrac{x}{X}=\dfrac{1}{25}$ がわかって …… **1点**

結論に …… **1点**

プラスα

Ⅱ　まず，s_2 を求める。小球の速度の水平成分を右向き正，鉛直成分を下向き正とすると，点 P_1 で衝突した直後の小球の速度の水平成分は $2u$，鉛直成分は u だから，今度は初速度が鉛直成分をもつ。しかし，計算してみると，$t_2=t_1$ であることがわかる。大変おもしろい結果である。さらに，速度の水平成分が u から $2u$ になったことにより，$s_2=2s_1$ が導かれる。

同じことを s_3 について試みる。まず，P_2 に衝突する直前の小球の速度の鉛直成分が $3u$ である。したがって，P_2 での衝突直後の速度は水平成分が $3u$，鉛直成分が $2u$ である。これを用いると，$t_3=t_1$ であることがわかる。また，水平成分が u から $3u$ になるから，$s_3=3s_1$ である。

同様にして，t_4 も t_5 も t_1 に等しくなることは容易に推測できよう。そうすれば，$s_n=ns_1$ になることも容易に推測できよう。