問題

自然数 n に対して

$$x^2 - y^2 = n^2 \quad \cdots\cdots ①$$

をみたす自然数 x，y について考える。（25 点）

(1)　$n = 3$，4 のとき，①をみたす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。（6 点）

(2)　3 以上の任意の自然数 n に対して，①をみたす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ が存在することを証明せよ。（5 点）

(3)　$n \geqq 3$ のとき，①をみたす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ がただ 1 組存在するための必要十分条件は，n または $\dfrac{n}{2}$ が素数であることを証明せよ。（14 点）

ポイント

(1)　$x^2 - y^2 = n^2$ を

(整数)×(整数)=(整数の定数)（◀ 1）

と変形して約数・倍数の関係に着目すればよい。このとき，3^2，4^2 の約数の組をすべて調べるのは大変なので，値の絞り込みを考えたい。

(2)　存在することを示すのだから，**具体的に①をみたす x，y の組を 1 つ求めればよい。（◀ 2）**
処理の方針は(1)と同じであるが，n の偶奇での場合分けに注意したい。

(3)　条件を

p : ①をみたす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ がただ 1 組存在する

q : n または $\dfrac{2}{n}$ が素数である

とすると，$p \Longleftrightarrow q$ を証明するわけ。このとき，$q \Longrightarrow p$ については，(1)，(2)と同様の処理で①をみたす x，y の組 $(x,\ y)$ を求めればよい。問題となるのは $p \Longrightarrow q$ の証明であり，p からスタートするのは難しい。そこで，この**対偶である $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$（◀ 3）**を示すこと考えてみよう。

解　答

(1)　① は

$$(x+y)(x-y) = n^2 \quad \cdots\cdots ①'$$

と変形できる。$n = 3$ のとき

$$(x+y)(x-y) = 3^2$$

ここで，$x > 0$，$y > 0$ より

$$x+y > x-y,\ x+y > 0 \quad \cdots\cdots ②$$

であり，また，$x+y$，$x-y$ は整数なので

$$(x+y,\ x-y) = (9,\ 1)$$

$$\therefore\ \ (x,\ y) = (5,\ 4) \quad \boxed{答}$$

$n = 4$ のとき

$$(x+y)(x-y) = 4^2$$

であり，$x+y$，$x-y$ の偶奇は一致し，上式の右辺は偶数なので，

◀1
この変形がポイント。

◀ (偶数)+(偶数)=(偶数)
(偶数)−(偶数)=(偶数)
(偶数)+(偶数)=(奇数)
(偶数)−(偶数)=(奇数)
(奇数)+(偶数)=(偶数)
(奇数)−(偶数)=(偶数)
からすぐにわかるだろう。

② と合わせると

$$(x+y,\ x-y)=(8,\ 2)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(5,\ 3)}$$ 答

(2) n が 3 以上の奇数のとき

$$(x+y,\ x-y)=(n^2,\ 1)$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=\left(\frac{n^2+1}{2},\ \frac{n^2-1}{2}\right)$$

において，$n^2\pm1$ は正の偶数であるから，これは ① をみたす自然数 x，y の組の 1 つである。

n が 4 以上の偶数のとき，$n=2m$（m は 2 以上の自然数）とおけて

$$①' \iff (x+y)(x-y)=4m^2$$

であり，② より

$$(x+y)(x-y)=(2m^2,\ 2)$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=(m^2+1,\ m^2-1)$$

となるが，$m^2+1>m^2-1>0$ より，これは ① をみたす自然数 x，y の組の 1 つである。

以上より，3 以上の任意の自然数 n に対して，① をみたす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ が存在する。（証終）

(3) n が 3 以上の素数のとき，n^2 の約数は n^2，n，1 であるから，② より，①′ をみたす自然数 x，y の組は

$$(x+y,\ x-y)=(n^2,\ 1)$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=\left(\frac{n^2+1}{2},\ \frac{n^2-1}{2}\right)$$

となり，$n^2\pm1$ は正の偶数であるから，$(x,\ y)=\left(\frac{n^2+1}{2},\ \frac{n^2-1}{2}\right)$ が ① をみたすただ 1 組の自然数の組である。

次に，n が 3 以上の素数でない奇数のとき，$a\geqq b>1$ をみたす奇数 a，b を用いて，$n=ab$ と表せる。$a^2b>b$ より

$$(x+y,\ x-y)=(a^2b,\ b)$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=\left(\frac{a^2b+b}{2},\ \frac{a^2b-b}{2}\right)$$

とすると，$\frac{a^2b+b}{2}$，$\frac{a^2b-b}{2}$ は自然数なので，これも ① をみたす。いま

$$\frac{n^2+1}{2}-\frac{a^2b+b}{2}=\frac{a^2b^2+1-a^2b-b}{2}$$
$$=\frac{(a^2b-1)(b-1)}{2}>0$$

$$\therefore\quad \frac{n^2+1}{2}\neq\frac{a^2b+b}{2}$$

であるから，① をみたす自然数 x，y の組は少なくとも 2 組存在する。

$\frac{n}{2}$ が素数のとき，$\frac{n}{2}=m$（m は素数）とおけ

$$①' \iff (x+y)(x-y)=4m^2$$

よって，$4m^2$ の正の約数は $4m^2$，$2m^2$，m^2，$4m$，$2m$，m，4，2，1 であり，$x+y$，$x-y$ は偶数であるから，② より，m が 3 以上の

◀2
実際には，これ以外に，① をみたす x，y が存在する可能性があるが，ここでは，存在することを証明することが目的なので，都合のよいものを見つければよい。

◀3
対偶 $\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$ を示す。

◀ $(x,\ y)=\left(\frac{n^2+1}{2},\ \frac{n^2-1}{2}\right)$ 以外にも存在することを示すのが目的（詳しくは「**解説 2**」を参照）。

◀差を計算し，これが 0 でないことを示す。

素数のとき

$$(x+y,\ x-y)=(2m^2,\ 2)$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=(m^2+1,\ m^2-1)$$

に限られる。また，$m=2$ のとき，(1)より $(x,\ y)=(5,\ 3)$ のただ1組である。

次に，$\dfrac{n}{2}=m$ が素数でない自然数のとき，$a \geqq b>1$ である自然数 a，b を用いて，$n=2ab$ $(m=ab)$ と表せる。$2a^2b>2b$ より

$$(x+y,\ x-y)=(2a^2b,\ 2b)$$

$$\therefore\quad (x,\ y)=(a^2b+b,\ a^2b-b)$$

とすると，a^2b+b，a^2b-b は自然数なので，これも ① をみたす。いま

$$m^2+1-(a^2b+b)=a^2b^2+1-a^2b-b$$
$$=(a^2b-1)(b-1)>0$$

$$\therefore\quad m^2+1 \neq a^2b+b$$

であるから，① をみたす自然数 x，y の組は少なくとも2組存在する。

以上より，① をみたす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ がただ1組存在するための必要十分条件は，n または $\dfrac{n}{2}$ が素数となることである。

（証終）

◀② より

$(4m^2,\ 1)$，$(2m^2,\ 2)$，

$(m^2,\ 4)$，$(4m,\ m)$

の4組があるが，$x+y$，$x-y$ が偶数であり，m が奇数なので

$(2m^2,\ 2)$

に限られる。これからも $m=2$ は別に考えなければならないことがわかるだろう。

解　説

1 補足 (1)の補足

(1)では

$x+y$，$x-y$ の大小関係，ともに正であること，$x+y$，$x-y$ の偶奇が一致することに着目して，x，y の組の候補をいかに絞り込むかがポイントである。これらを考えないと，たとえば $n=4$ のとき

$x+y$	2^4	2^3	2^2	2	1	-2^4	-2^3	-2^2	-2	-1
$x-y$	1	2	2^2	2^3	2^4	-1	-2	-2^2	-2^3	-2^4

のすべての場合を調べることになる。

2 補足 (3)の補足

「**解答**」では

n，$\dfrac{n}{2}$ が素数でないならば，① をみたす自然数の組が少なくとも2つ存在する

ことを示したわけで，これにより

① をみたす自然数 x，y の組 $(x,\ y)$ がただ1組存在するならば，n または $\dfrac{n}{2}$ が素数である。

と結論できるのである（対偶法）。

極　意

・命題：$\boldsymbol{p} \Longrightarrow \boldsymbol{q}$ が直接示しにくいときには，対偶を示す

命題：$p \Longrightarrow q$ において，条件 p が扱いにくいとき，もしくは，条件 $\overline{q}$ が扱いやすいとき，この対偶である $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を示すとうまくいくことがある。

下記の例では，既約分数であることを示すよりも，既約分数でないことを示す方が易しい（実際に約分できることを示せばよい）ので，対偶を示すことを考える。このように示しやすいものは何かを考慮して，証明に行き詰まったら，対偶を示すことを考えよう。

（例）m，n は自然数とする。$\dfrac{5m+6n}{3m+4n}$ が既約分数ならば，$\dfrac{n}{m}$ も既約分数であることを証明せよ。

（解答）$\dfrac{n}{m}$ が既約分数でない有理数とすると，m，n は互いに素な整数 p，q および，2 以上の整数 k を用いて

$$m = kp,\ n = kq$$

と表せる。このとき

$$3m+4n = k(3p+4q),\ 5m+6n = k(5p+6q)$$

であるから，$3m+4n$，$5m+6n$ はそれぞれ k で割り切れるので，$\dfrac{5m+6n}{3m+4n}$ は約分でき，既約分数ではない。

したがって，$\dfrac{5m+6n}{3m+4n}$ が既約分数ならば，$\dfrac{n}{m}$ も既約分数である。