物理 直前3 V

2 問題

《振動する導体棒を含む回路》

次の文章を読んで，　　　には適した式を，｛　　　｝の中からは正しいものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，　　　は，すでに　　　で与えられたものと同じものを表す。また，**問 1** では指示に従って，解答を解答欄の枠内に記入せよ。

図 1 のように，質量 m，長さ l の一様な棒 p が，ともにばね定数(弾性定数) k で自然長の等しい 2 本の軽いばねで，水平につり下げられて静止している。2 本のばねの伸縮方向はともに鉛直方向であり，これらの上端 a，b はそれぞれ，絶縁体でできている水平な天井に固定されており，下端 c，d は，それぞれ棒 p の両端に接続されている。2 本のばねと p はともに，電気抵抗の無視できる導体でできているものとし，空間には，p に垂直，かつ水平な向き(図 1 の向き)に磁束密度の大きさ B の一様な磁場を加えるものとする。以下では，ばねの自己インダクタンスは無視でき，p はつねに水平を保つものとし，図 1 のように，つり合いの状態における p の位置を原点 O として，鉛直上向きを正とする y 軸をとる。

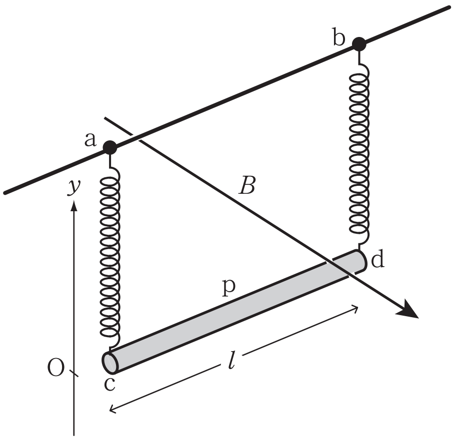


図 1

(1) p が原点 O で静止している状態から，p に，瞬間的に $+y$ 向きで大きさ v_0 の初速度を与えたところ，p は y 方向に振動し始めた。その後，座標 y の位置を通過する瞬間に p が受ける合力は，$+y$ 向きを正として，$\boxed{\text{イ}}$ と表されるから，このとき p は，原点 O を中心として単振動をすることがわかる。その角振動数を ω_1 とすると，$\omega_1 = \boxed{\text{ロ}}$ と表される。また，p に初速度を与えた瞬間を時刻 $t=0$ とすると，p の速度 v ($+y$ 向きを正とする)は，時刻 t の関数として，$v = \boxed{\text{ハ}}$ (ω_1 を含んだ式で表せ) と表される。さらに，このとき p に生じる誘導起電力の最大値は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

(2) 次に，図2のような，自己インダクタンスLで電気抵抗の無視できるコイルを，スイッチSを介して，図1，図2のa，bがそれぞれ一致するように，図1のa，bに接続する。最初，Sは開いているものとする。この状態から，Sを開いたまま，(1)と同様に，原点Oで静止しているpに瞬間的に，$+y$向きで大きさv_0の初速度を与えたところ，pは原点Oを中心として，(1)の場合と同様に，角振動数ω_1の単振動をし始めた。その後しばらくしてから，pが原点Oを$+y$向きに通過した瞬間にSを閉じた。Sを閉じた直後にコイルを流れる電流の強さは $\boxed{\text{ホ}}$ である。また，Sを閉じた後も，pに生じる誘導起電力の最大値は $\boxed{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

Sを閉じた後，コイルには一定の角周波数ω_2の振動電流が流れ，それとともに，pは，原点Oを中心として角振動数ω_2の単振動をする。このときコイルを流れる電流の最大値は，B，l，v_0，L，ω_2を用いて $\boxed{\text{ヘ}}$ と表される。また，スイッチを閉じた瞬間を改めて時刻$t=0$とすると，コイルを流れる電流I(図2の矢印の向きを正とする)と時刻tの関係を表すグラフは，{**ト**：選択図1の①～④}のようになる。このとき，pにも電流が流れるため，pは磁場から力を受けることに注意すると，スイッチを閉じる前後のpの単振動の角振動数ω_1，ω_2の間には，{**チ**：① $\omega_1>\omega_2$，　② $\omega_1=\omega_2$，　③ $\omega_1<\omega_2$}の関係があることがわかる。

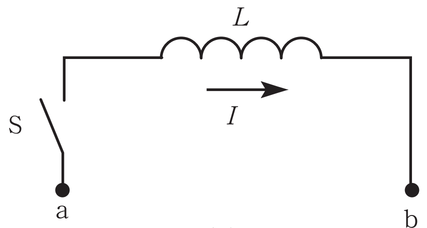
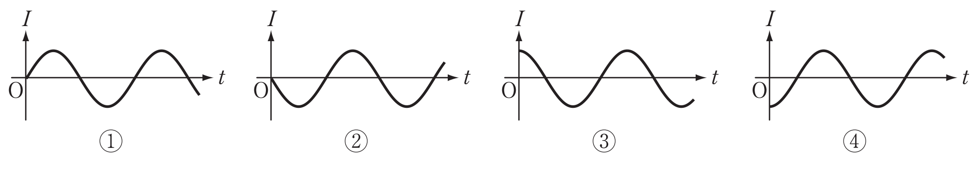


図2



選択図1

(3) 今度は，図２のコイルの代わりに，図３のような，自己インダクタンスLで電気抵抗の無視できるコイル，電気容量を変化させることができるコンデンサーおよび抵抗値Rの抵抗器からなる回路を，図１，図３のａ，ｂがそれぞれ一致するように，図１のａ，ｂに接続する。最初，コンデンサーには電荷が蓄えられていないものとする。

まず，コンデンサーの電気容量を適当に調節して，導体棒ｐが原点Ｏに静止している状態から，ｐに瞬間的に，$+y$向きで大きさv_0の初速度を与えたところ，ｐはy方向に振動した。このとき，回路には角周波数ω_3の振動電流が流れたが，ｐの振動の振幅，および振動電流の振幅は次第に減衰していった。ｐが振動している間のある時刻tの瞬間にコイルを流れる電流i_L(図３のi_Lの矢印の向きを正とする)を，$i_L=I_L\cos\omega_3 t$ ($I_L>0$) とする。この瞬間にコンデンサーに流れ込む電流i_C (図３のi_Cの矢印の向きを正とする)は，電気容量をCとして，$i_C=(\boxed{\text{リ}})\times\cos\omega_3 t$，抵抗器を流れる電流$i_R$ (図３のi_Rの矢印の向きを正とする)は，$i_R=(\boxed{\text{ヌ}})\times\cos\omega_3 t$と表される。

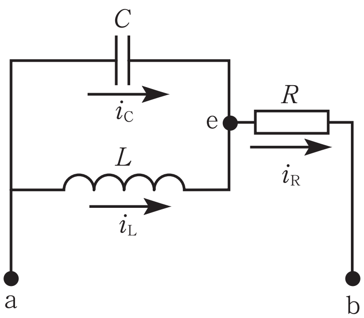


図３

問１　この後，コンデンサーの電気容量をゆっくりと変化させていったところ，電気容量Cが，$C=C_0$になったとき，ｐの振動の減衰，およびコイルとコンデンサーを流れる振動電流の減衰がともに起こらず，安定した状態になった(ｐの振動の振幅，振動電流の振幅は一定となった)。これまでの考察を踏まえて，C_0を，L，m，kを用いて表せ。考え方や計算過程も明記せよ。

▶問題文読解のチェックポイント

☑ **問１**において，減衰が起こらない安定状態では，エネルギーの観点から考えれば，回路のエネルギーは保存される。このことから，次のことに気づいたか？

→ 抵抗器には電流が流れない

→ ｐにも電流が流れない

→ ｐが磁場から受ける力は０である

→ ｐの単振動の角振動数は，(1)の場合と同じ

解　答

(1)イ　$-2ky$　　ロ　$\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$　　ハ　$v_0\cos\omega_1 t$　　ニ　v_0Bl

(2)ホ　0　　ヘ　$\dfrac{v_0Bl}{\omega_2 L}$　　ト　②　　チ　③

(3)リ　$-\omega_3{}^2LCI_L$　　ヌ　$I_L(1-\omega_3{}^2LC)$

問1　コイルとコンデンサーを，安定した振動電流が流れ続けるとき，抵抗器で消費されるジュール熱は0である。したがって，このとき，$i_R=0$ なので

$$1-\omega_3{}^2LC_0=0$$

また，キルヒホッフの第1法則より，このときpを流れる電流も0なので，pが磁場から受ける力も0であり，pは，(1)と同じ角振動数 ω_1 で単振動をする。そこで，上式に $\omega_3=\omega_1=\sqrt{2k/m}$ を代入すると

$$1-\frac{2k}{m}\cdot LC_0=0 \qquad \therefore\ C_0=\frac{m}{2kL}$$ 答

答案作成のポイント

◀安定状態では抵抗器に電流が流れないことを明記しよう。

解　説

(1)イ　pが原点Oで静止している状態におけるばねの伸びを y_0，重力加速度の大きさを g とすると，静止した状態でpが受ける力のつり合いを表す式は

$$2ky_0-mg=0$$

また，pが座標 y の位置を通過する瞬間のばねの伸びは y_0-y である。したがって，この瞬間にpが受ける合力は，上式より

$$2k(y_0-y)-mg=-2ky$$

ロ　イの結果より，座標 y の位置を通過する瞬間のpの加速度を a（$+y$ 向き正）とすると，pの運動方程式は

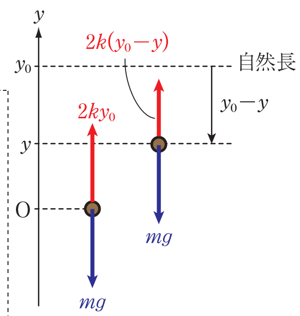
$$ma=-2ky$$

上式は，pの運動が，$y=0$ を中心とする単振動であることを表す。よって，角振動数 ω_1 は次式から求められる。

$$a=-\frac{2k}{m}y=-\omega_1{}^2y \quad \cdots\cdots\text{(i)}$$

ハ　$t=0$ の瞬間，$v=v_0$ であり，この後しばらくの間，pは $-y$ 向きの力を受け $-y$ 向きの加速度をもつため，v は減少する。

☑ 解法・思考のステップ



◀ばねが2本あることに注意。なお，$+y$ 向きを正とした。

ニ　速度 v の瞬間に p に生じる誘導起電力の大きさを V とすると

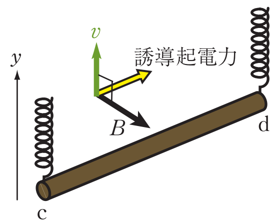
$$V=|vBl|=|v|Bl$$

したがって，$|v|$ が最大値 v_0 をとる瞬間に V も最大になる。

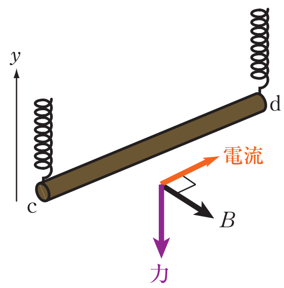
(2)ホ　スイッチを閉じた瞬間，p に生じている誘導起電力により，コイルを流れる電流の強さは，(0 から)増加し始める。コイルには，この電流の変化を妨げるような自己誘導起電力が生じる。

ヘ　p の速さの最大値は v_0 なので，p に生じる誘導起電力の最大値は v_0Bl であり，このときのコイルのリアクタンスは ω_2L である。電流の最大値は，誘導起電力の最大値をリアクタンスでわったものである。

ト　ホの結果より，$t=0$ の瞬間，$I=0$ である。また，$t=0$ の瞬間，p の速度は $+y$ 向きであるから，右ねじの法則より，この瞬間，p には c→d 向き(コイルには b→a 向き)の電流を流そうとする向きの起電力が生じている(右図参照)。したがって，スイッチを閉じた直後，コイルには負の向きに電流が流れ始める。



チ　電流は周期的に変化するので，p が磁場から受ける力の向きも周期的に変化する。そこで，初めの半周期について考えると，電流は c→d 向きであるから，フレミングの左手の法則より，p が磁場から受ける力は $-y$ 向きである。一方，この間，原点 O からの p の変位は $+y$ 向きである。したがって，F と y は互いに逆向きであり，p が磁場から受ける力は，p を原点 O に引き戻す向きの力である。この結果，(1)の場合よりも**復元力の大きさが増加する**。これは，(i)で $2k$ の部分が大きくなることに相当する。



◀問題を解くうえでは，復元力が大きくなることさえわかれば，$\omega_1<\omega_2$ が判断できる。

(3)リ　e に対する a の電位を V_{ae} とすると，**コイルの両端の電圧は電流に対して位相が $\pi/2$ 進んでいる**こと，および，このときの**コイルのリアクタンスは ω_3L** であることから

$$V_{ae}=\omega_3LI_L\cos\left(\omega_3t+\frac{\pi}{2}\right)$$

さらに，**コンデンサーに流れ込む電流 i_C は**，コンデンサーに加わる**電圧 V_{ae} に対して位相が $\pi/2$ 進んでいる**こと，および，このときの**コンデンサーのリアクタンスは $1/(\omega_3C)$** であることから

$$i_C=\frac{\omega_3LI_L}{1/(\omega_3C)}\cos\left(\omega_3t+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\omega_3{}^2LCI_L\times\cos\omega_3t$$

◀ $\cos(\omega_3t+\pi)$
$=-\cos\omega_3t$

ヌ　キルヒホッフの第1法則より

$$i_R = i_L + i_C = I_L\cos\omega_3 t - \omega_3{}^2 LCI_L\cos\omega_3 t$$
$$= I_L(1-\omega_3{}^2 LC)\times\cos\omega_3 t$$

採点基準

配点 33点

(1)イ　3点	ロ　3点	ハ　3点	ニ　3点
(2)ホ　2点	ヘ　3点	ト　2点	チ　3点
(3)リ　4点	ヌ　2点	問1　5点	

配点のめやす

問1　このとき抵抗器を流れる電流が0であることがわかって ……………… **2点**

このとき $\omega_3=\omega_1$ であることがわかって ……………… **2点**

結論に ……………… **1点**

プラスα

(2)　スイッチを閉じると，pを電流が流れるので，pは磁場から力を受ける。このため，pの運動の様子は，(1)の場合とは異なる。そこで，このときのpの運動について考えてみよう。

座標 y の位置を通過する瞬間のpの速度を $v\,(=dy/dt)$，pの加速度を $a_2\,(=dv/dt)$，図2の矢印の向きを正として，コイルを流れる電流を I とすると，この瞬間のpの運動方程式は

$$ma_2 = -2ky + IBl$$

また，この瞬間の回路の状態に，キルヒホッフの第2法則を適用すると

$$-vBl - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \therefore\ \frac{dI}{dt} = -\frac{Bl}{L}v$$

ここで，先ほどの運動方程式を時刻 t で微分し，上式を代入して整理すると

$$m\frac{da_2}{dt} = -2k\frac{dy}{dt} + Bl\frac{dI}{dt} \qquad \therefore\ m\frac{d^2v}{dt^2} = -\left(2k+\frac{B^2l^2}{L}\right)v$$

上式と，角振動数 ω の単振動の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$ との対応を考えると，v は，時刻 t の正弦関数として表されることがわかる。また，このときの v の角振動数 ω_2 は，次のように表される。

$$m\frac{d^2v}{dt^2} = -\left(2k+\frac{B^2l^2}{L}\right)v = -m\omega_2{}^2 v \qquad \therefore\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2kL+B^2l^2}{mL}}\ \left(>\sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega_1\right)$$

なお，v が正弦関数的に変化すること(v が角振動数 ω_2 の単振動をすること)から，y も正弦関数的に変化すること，つまり，pは角振動数 ω_2 の単振動をすることが納得できるだろう。