添削問題解答解説

物理 直前3

YQBFXK-11C1-01

1 問題

《円盤とともに回転する剛体の運動》

次の文章を読んで，$\boxed{}$には適した式を，｛　　｝の中からは適したものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，**問 1**，**問 2** では指示に従って，解答をそれぞれの解答欄の枠内に記入せよ。

(1) 図 1 のような，高さが h，半径が d，質量が m で，密度の一様な円柱がある。この円柱を摩擦のある水平な床の上に静止させた状態から，図 1 のように，作用線が円柱の重心 G を通るように，円柱に，水平方向に大きさ F の外力を加える。ただし，F は 0 から少しずつ大きくするものとし，床と円柱との間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする。

このとき円柱が倒れることなく床に沿って滑り始めたとすると，滑り始める直前の F の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，このようなことが起こるためには，$\mu<\boxed{\text{イ}}$ でなければならない。

一方，このとき円柱が床に沿って滑り出すことなく倒れ始めたとすると，倒れ始める直前の F の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。ただし，このようなことが起こるためには，$\mu>\boxed{\text{エ}}$ でなければならない。

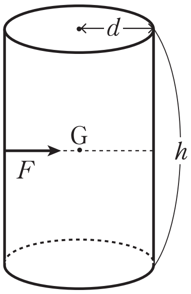


図 1

(2) 次に，図 2 のように，図 1 の円柱を，上面が水平な円盤の上に載せる。この円盤を，円盤の中心 O を通る鉛直な軸のまわりに，上方から見て反時計回りに角速度 $\omega\,(>0)$ で回転させる。以下では，円柱は円盤に対して滑ることなく円盤とともに回転しているものとし，点 O から円柱の底面の中心 O′ までの距離を r，円盤と円柱との間の静止摩擦係数を μ とする。また，d は r に比べて十分に小さく，以下で考える，円柱が受ける遠心力の作用点は，円柱の重心 G に一致するとみなせるものとする。

　このときの円柱の運動を，円柱とともに回転している観測者から見ると，円柱が受ける遠心力の大きさは $\boxed{\text{オ}}$ である。

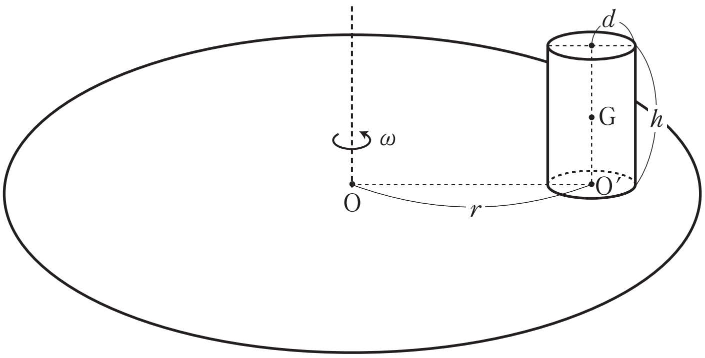


図 2

問 1　円柱が円盤に沿って滑ったり倒れたりすることなく円盤とともに回転するための ω の条件を求めよ。考え方や計算過程も記せ。

(3) 図 3 は，(2)において，円柱が円盤とともに角速度 ω で回転している様子を真上から見たものである。(2)(図 3)の状態から，瞬間的に円盤を鉛直下向きに素早く動かしたところ，円柱は円盤から離れて運動し始めた。円盤から離れた後の円柱の重心 G の軌跡を真上から見ると，{**カ**：図 3 の①～④より選択} のようになる。

　また，図 3 のように，O と O′ を結ぶ直線が円柱の側面と交わる点のうち，点 O から遠い方を A，近い方を B とすると，図 3 の状態での，静止している観測者(慣性系)から見た点 A の速さは $\boxed{\text{キ}}$，点 B の速さは $\boxed{\text{ク}}$ と表される。これより，円盤を鉛直下向きに素早く動かした後の，G(O′) とともに運動する観測者から見た円柱の運動は，真上から見て，{**ケ**：① 時計回り，② 反時計回り} で角速度の大きさが $\boxed{\text{コ}}$ の回転運動であることがわかる。

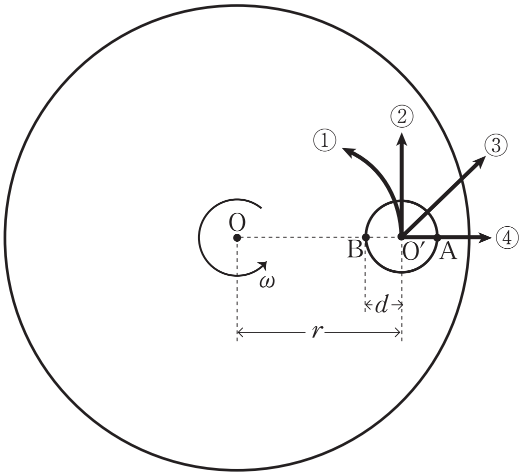


図 3

問 2　｛　**カ**　｝の選択肢を選んだ理由を述べよ。

▶問題文読解のチェックポイント

☑　(1)では，円柱が滑り出す直前，あるいは倒れ始める直前について考えることができたか？

→直前であれば円柱は静止しているので，力，および力のモーメントはつり合っている。

☑　(2)や(3)では，観測者をどこに置いて考えるかに注意。

→(2)では，円柱とともに回転する観測者から見るように誘導されている。遠心力を用いて考えると，(1)と同じように議論できる。

→(3)**問 2** では，静止している観測者から見て考えないと，わかりづらい。

解　答

答案作成のポイント

(1)ア　$\boldsymbol{\mu mg}$　　イ　$\boldsymbol{\dfrac{2d}{h}}$　　ウ　$\boldsymbol{\dfrac{2mgd}{h}}$　　エ　$\boldsymbol{\dfrac{2d}{h}}$

(2)オ　$\boldsymbol{mr\omega^2}$

問１　円柱が滑らないためには，円柱が受ける遠心力の大きさが，最大摩擦力の大きさ以下でなくてはならないので

$$mr\omega^2 \leqq \mu mg \qquad \therefore\ \ \omega \leqq \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$$

また，円柱が倒れないためには，遠心力の大きさが**ウ**以下でなくてはならないので

$$mr\omega^2 \leqq \frac{2mgd}{h} \qquad \therefore\ \ \omega \leqq \sqrt{\frac{2gd}{rh}}$$

つまり，円柱が滑ったり倒れたりしないためには，ω がこの 2 つの条件をともに満たせばよい。(1)の考察を踏まえると

$\boldsymbol{\mu < \dfrac{2d}{h}}$ **の場合，**$\boldsymbol{\omega \leqq \sqrt{\dfrac{\mu g}{r}}}$　答

$\boldsymbol{\mu > \dfrac{2d}{h}}$ **の場合，**$\boldsymbol{\omega \leqq \sqrt{\dfrac{2gd}{rh}}}$　答

(3)カ　②　　キ　$\boldsymbol{(r+d)\omega}$　　ク　$\boldsymbol{(r-d)\omega}$　　ケ　②　　コ　$\boldsymbol{\omega}$

問２　慣性系から見ると，慣性の法則より，円柱の重心 G は，円盤から離れる直前の速度で運動しようとする。この速度の方向は，G の円軌道の接線方向に等しい。　答

◀滑らない条件と倒れない条件を分けて考える。

◀**イ**のようにモーメントのつり合いから考えてもよい。

◀$\mu = 2d/h$ の場合については，いずれか一方に含めて考えてもよいし，また，いずれにも含めなくてもよい。

解　説

(1)ア　円柱が滑り出す前の状態で，円柱が床から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを f とすると，円柱が受ける力のつり合いを表す式は

鉛直成分：　$N=mg$

水平成分：　$f=F$

円柱が滑り出す直前，f は最大摩擦力の大きさ μN に等しいので，この瞬間の F の値は

$$F=f=\mu N=\mu mg$$

イ　円柱が床から受ける抗力の作用点から点C(右上図参照)までの距離を x とすると，静止している状態で円柱が受ける力の点Cまわりの**モーメントのつり合い**を表す式は，反時計回りを正として

$$mg\times d-F\times\frac{1}{2}h-N\times x=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{2mgd-Fh}{2N}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

(i)からわかるように，F を大きくしていくと x は小さくなる。ところで，円柱が倒れることなく滑り出すためには，**ア**で考えた瞬間に $x>0$ を満たす x が存在しなければならない。そこで，(i)に**ア**の結果，および $N=mg$ を代入すると

$$x=\frac{2mgd-\mu mgh}{2mg}>0\qquad\therefore\quad \mu<\frac{2d}{h}$$

ウ　円柱が倒れ始める直前，円柱が床から受ける抗力の作用点は，右図の点Cに一致している。したがって，この瞬間に円柱が受ける力の点Cまわりのモーメントのつり合いを表す式は

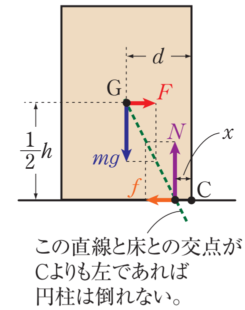
$$mg\times d-F\times\frac{1}{2}h=0\qquad\therefore\quad F=\frac{2mgd}{h}$$

エ　**ウ**の結果を用いると，静止摩擦係数 μ の満たすべき条件は

$$\mu mg>\frac{2mgd}{h}\qquad\therefore\quad \mu>\frac{2d}{h}$$

(2)オ　r に比べて円柱の半径 d が無視できることから，求める遠心力の大きさは $mr\omega^2$ である。

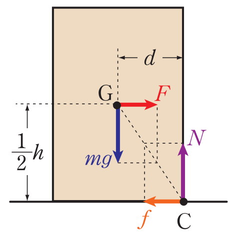
☑ 解法・思考のステップ



◀ f は μN 以下の値しかとることができない。このため，**外力の大きさが最大摩擦力の大きさを越えると，物体は滑り出す。**

◀ 摩擦力の作用線は点Cを通るので，摩擦力の点Cまわりのモーメントは0である。

◀ $x<0$ であるようなつり合いの状態は存在しない。つまり，式の上で $x<0$ であるとき，円柱は倒れてしまう。

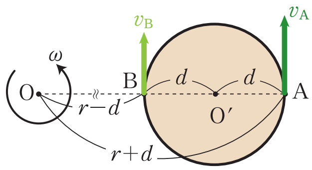


◀ 円柱が床に沿って**滑り出すことなく倒れ始めるためには，ウで考えた瞬間に円柱が受ける静止摩擦力の大きさが，最大摩擦力の大きさ μN よりも小さい必要がある。**

◀ 円柱を半径 r にある小物体とみなした。

(3)キ，ク　慣性系から見ると，点A，Bはそれぞれ中心Oからの距離が$r+d$，$r-d$で，ともに角速度ωの円運動をしているので，点A，Bの速さをそれぞれv_A，v_Bとすると

$$v_A=(r+d)\omega, \qquad v_B=(r-d)\omega$$



ケ，コ　慣性系から見た場合，円柱が円盤から離れる直前，点Gは，半径r，角速度ωで円運動しているので，その速さをv_Gとすると

$$v_G=r\omega$$

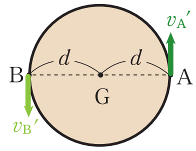
ここで，**慣性の法則を用いて考えると，円柱の各点は，円盤から離れる直前の速度で運動しようとする**。また，**重心Gは円盤を離れる直前の速度で運動しようとする**。以上を念頭に置いて，**重心Gから見た，点A，Bの運動**について考えよう。

円盤から離れる直前の，重心Gから見た点A，Bの相対速度をそれぞれv_A'，v_B'とすると(v_Gの向きを正とする)

$$v_A'=v_A-v_G=d\omega, \qquad v_B'=v_B-v_G=-d\omega$$

これを真上から見た右図より，重心Gから見た点A，Bの回転の向きは反時計回り(②)であることがわかる。また，円柱の半径がdであることから，重心Gから見た点Aの角速度の大きさは

$$\frac{v_A'}{d}=\omega$$



◀もちろん，点Bの角速度を考えて

$$\left|\frac{v_B'}{d}\right|=\omega$$

としてもよい。

採点基準

配点 **35点**

(1)ア　3点　　**イ**　4点　　**ウ**　4点　　**エ**　3点

(2)オ　3点　　**問1**　4点

(3)カ　2点　　**キ**　2点　　**ク**　2点　　**ケ**　2点　　**コ**　3点　　**問2**　3点

配点のめやす

問1　滑らない条件の立式，およびこのときのωの条件に ……………… **各1点**

倒れない条件の立式，およびこのときのωの条件に ……………… **各1点**

プラスα

(1)　円柱のような，大きさの無視できない物体のつり合いを考える場合には，力のつり合いと同時に力のモーメントのつり合いも考えなければならない。このため，本問のように摩擦がある場合には，力のつり合いと力のモーメントのつり合いのどちらが先に破れるかを考える必要がある。

物体が倒れる場合について考える際には，物体がどの点のまわりに倒れる(回転する)かを考えなければならないが，本問の場合，(i)からわかるように，Fを次第に大きくしていくと，抗力の作用点が点Cに向かって移動していく。このことから，円柱は，滑らなければ，やがて，点Cまわりに倒れることは明らかである。