必修テーマ

見通しの立て方

学習時間 60分

XMAPCA-Z1J1-01

到達目標

見慣れない設定の問題で，何を手がかりにしたらよいかわからないときがある。そんなときは試行錯誤しながらその場で方針を探らなければならないが，その試行錯誤の際には

- 簡単な例（具体例）をかいてみる
- 状況を図にしてみる
- 前の設問の利用を考えてみる

を意識するとよい。今回はこの 3 つの手法を確認し，それぞれの考え方をマスターしよう。

簡単な例をかいてみる

具体例などの簡単な例を考えると実際にどのようになるのかを見ることができるので，状況を捉えるのに有効である。次の問題で試してみよう。

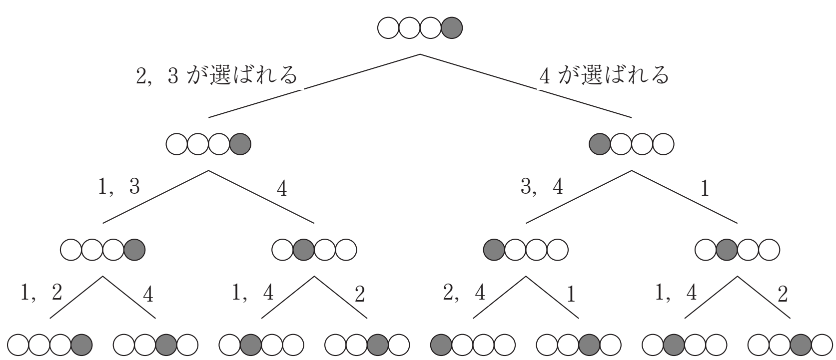
N を自然数とする。$N+1$ 個の箱があり，1 から $N+1$ までの番号が付いている。どの箱にも玉が 1 個入っている。番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で，番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作（＊）を，おのおのの $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1$ に対して，k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う。

（＊）k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び，その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する。（ただし，N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は，どれも同様に確からしいとする。）

操作がすべて終了した後，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ。

（京大）

操作に文字が含まれていてややこしい。とりあえず $N=3$ として具体例をかきながら状況を捉えよう。$N=3$ のとき登場するのは，箱が 4 個と白玉 3 個，赤玉 1 個。図では簡単にかくために，1，2，3，4 の箱に入っている玉だけを左から順に並べてかくことにする。最後の 4 回目の操作が終わったときに赤玉が 4 の箱に入っている状況を考えるので，とりあえず 3 回分の操作の様子をかいてみよう。なお，以下の考察に実感をもってもらうために，諸君も読むだけでなく，自分でメモ用紙などへ $N=3$ のときの状況をかいてみてほしい。



さて，次が最後の操作だ。次の操作で赤玉が 4 の箱に入る状況を考える。すると，図の一番左の状態はどう頑張っても赤玉が 4 に入らないことがわかるだろう。逆に，他の場合は赤玉の入った箱

を選べばＯＫである。つまり求める確率は

最後の操作の直前に赤玉は $N+1$ の箱に入っておらず，最後の操作で赤玉の入った箱が選ばれる確率

である。

この確率を求めればよい。例を見てみると，最後の操作の前に赤玉が 4 の箱に入っているのは一番左の状態だけだ。この状態は 1 回も赤玉が移動しなかった場合である。逆に言えば

1 回でも赤玉が移動すると赤玉は 4 の箱に戻ってこない　……………… (#)

ようだ。なぜだろうか？と考えながら操作を振り返ってみると，例を実際にかいた諸君ならわかると思うが，1 回目の操作のとき赤玉が移動するなら移動先は 1 の箱，2 回目の移動先は 2 の箱，のように k 回目の操作のときの赤玉の移動先は k の箱なので，1 回外に出た赤玉が N 回目までに $N+1$ の箱に戻ることはない。これで(#)が正しいとわかったので，確率は

$$\underbrace{\frac{1}{N}}_{\substack{\text{最後に赤玉の}\\ \text{入った箱を選ぶ}}}\left\{\underbrace{1-}_{\text{余事象}}\underbrace{\left(\frac{N-1}{N}\right)^N}_{\substack{N+1\text{ の箱が } N \text{ 回目まで}\\ 1\text{ 度も選ばれない}}}\right\}$$

と求めることができる。

例をかくことで

- 最後の操作の直前に赤玉は $N+1$ の箱に入っていてはいけない
- 1 回でも赤玉が移動すると赤玉は戻ってこない

という規則が発見できた。数学の問題を考えるときは

与えられた条件 ⟶ 論理的な道筋をたどる ⟶ こういう規則が成り立つ

という流れで考えることが多いが，例をかくことで

こういう規則が成り立つようだ ⟶ 理由を考えてみよう

という逆の流れで考えることができるため，方針選択の幅が広がるわけだ。

合格言

●簡単な例をかいて手がかりを探れ

状況を図にしてみる

ややこしい設定のときは，図にすることで文章よりも状況がつかみやすくなる。

以下の問に答えよ。

(1) A，B の 2 人がそれぞれ，「石」，「はさみ」，「紙」の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで，双方の「手」によって勝敗を決める。「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け，「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け，「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け，同じ「手」どうしは引き分けとする。A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ。

(2) 上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ，これらに加えて，4 種類目の「手」として「水」を加える。「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け，同じ「手」どうしは引き分けとする。A，B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとするとき，A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ。

(3) 上の 4 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ，これらに加え，さらに第 5 の「手」として「土」を加える。B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき，A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには，「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか。ただし，同じ「手」どうしの場合，しかもその場合にのみ引き分けとする。

（神大）

この問題，問題文が長くややこしいが，表をかけばすごく簡単である。

(1)は左下の表より，勝つ確率が $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$，引き分けの確率も $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ である。(2)は右下の表より，勝つ確率が $\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$，引き分けの確率は $\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$ である。

	石	はさみ	紙
石	△	○	×
はさみ	×	△	○
紙	○	×	△

	石	はさみ	紙	水
石	△	○	×	×
はさみ	×	△	○	×
紙	○	×	△	○
水	○	○	×	△

最後の(3)は，左下の表においてどの行も○と×の数が同じになるように「土」の部分を埋めればよいので，その埋め方は右下の表の通り。したがって，「土」は「紙」と「水」に勝ち，「石」と「はさみ」に負けるように定めればよい。

	石	はさみ	紙	水	土
石	△	○	×	×	
はさみ	×	△	○	×	
紙	○	×	△	○	
水	○	○	×	△	
土					

	石	はさみ	紙	水	土
石	△	○	×	×	○
はさみ	×	△	○	×	○
紙	○	×	△	○	×
水	○	○	×	△	×
土	×	×	○	○	△

表にするだけで格段に状況がつかみやすくなっただろう。

次の問題は難しいが，遷移図をかくことを意識するとかなり見通しがよくなる。

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形が 1 つと球がたくさん用意されている。三角形の各頂点上には高々 2 個の球を置くことができるとし，三角形上の頂点以外の位置には球を置くことができないとする。三角形上に少なくとも 1 個の球が置かれている状態に対して次の操作 T を考える。

操作 T

（T1） 三角形上の球どれか 1 個を等しい確率で選ぶ。

（T2） (a) 確率 $\frac{1}{2}$ で，（T1) により選ばれた球が置かれている頂点上に三角形外から球を 1 個加える。

(b) 確率 $\frac{1}{4}$ ずつで，（T1) により選ばれた球を隣の 2 つの頂点のどちらかに移す。

（T3） (T2) の結果，1 つの頂点上に 3 個の球が置かれた場合は，その 3 個目の球を直前にあった位置に戻す。

また，次の 4 つの状態を考える。

A：2 つの頂点上に 2 個ずつ球が置かれ，1 つの頂点上には何も置かれていない状態

B：1 つの頂点上に 2 個の球が置かれ，2 つの頂点上に 1 個ずつ球が置かれている状態

C：三角形上に合計 5 個の球が置かれている状態

D：三角形上に合計 6 個の球が置かれている状態

いま，状態 A から始め，操作 T を何回か繰り返し行う。以下，各回の操作を (T3) まで終えたときの状態のみに着目し，操作途中の状態を考えないものとする。また，n を自然数とする。

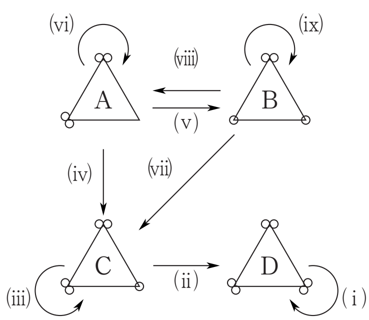
(1) 操作 T を n 回繰り返し終えたとき，状態が A である確率を a_n，状態が B である確率を b_n とする。$a_1 = \boxed{\text{（あ）}}$，$b_1 = \boxed{\text{（い）}}$ である。さらに，$n \geqq 2$ に対して a_n，b_n を a_{n-1}，b_{n-1} で表すと

$$a_n = \boxed{\text{（う）}}\, a_{n-1} + \boxed{\text{（え）}}\, b_{n-1}$$

$$b_n = \boxed{\text{（お）}}\, a_{n-1} + \boxed{\text{（か）}}\, b_{n-1}$$

である。

（慶大・一部省略）



本問は状況が移り変わる様子を題材としているので，遷移図をかくとよい。遷移図とは状況の移り変わりを矢印で示した図である。本問では 4 つの状態 A，B，C，D が変化する。球の数は 1 つ増えるか変わらないかのどちらかなので，遷移図は右のようになる。この図の(i)～(ix)の矢印の確率を求めることが目標となるわけだ。((1)で必要なのは A，B に関する矢印だけだが，せっかくなのですべて求めよう。)

(i) D からは矢印が 1 つしか出ていないので確率は 1 である。

(ii) C から D になるのは，(T1) で 1 つだけの球が選ばれ (T2) で(a)となる場合なので $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ となる。

(iii)　(ii)でない確率なので $1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ である。

(iv)　A から C になるには (T2) で(a)となる必要があるが，(T1) でどの球を選んでも (T3) で必ず元に戻ってしまうので確率は 0 となる。

(v)　A から B になるのは，(T2) で(b)となり何もない頂点へ移動する場合なので $\frac{1}{4}$ である。

(vi)　(iv)でも(v)でもない確率なので $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ である。

(vii)　B から C になるのは，(T1) で 1 つだけ置かれている球が選ばれ (T2) で(a)となる場合なので $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ である。

(viii)　B から A になるのは，(T1) で 1 つだけ置かれている球が選ばれ (T2) で(b)となって 1 つの球の方へ移動する場合なので $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ である。

(ix)　(vii)でも(viii)でもない確率なので $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ である。

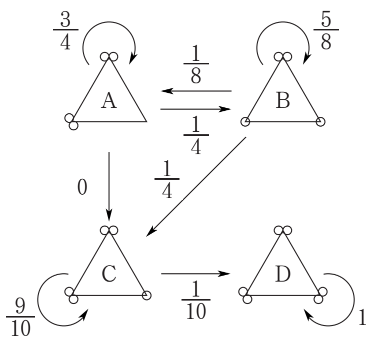
以上(i)～(ix)の考察を図にかくと右の図のようになるので

$$a_1=\frac{3}{4}$$

$$b_1=\frac{1}{4}$$

$$a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}+\frac{1}{8}b_{n-1}$$

$$b_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+\frac{5}{8}b_{n-1}$$



いかがだろうか。いきなり立式することを目標とするのではなく，間に「遷移図を完成させる」という目標をはさむことで，見通しよく考えていくことができただろう。

今回の例のように，ややこしい設定の問題では状況を図にしてみるとよい。今回例にあげた表や遷移図だけでなく，場合分けが多いときは樹形図，集合が絡むときはベン図など，状況に応じて適切な図をかくことが重要である。

合格言

●状況を図に表して整理せよ

前の設問の利用を考えてみる

今回の題材は次の(2)だ。

整数 p，q（$p \geqq q \geqq 0$）に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

(1) n，k が 0 以上の整数のとき，

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) $$

を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

（千葉大）

(1)は与えられた二項係数の定義を利用して計算すれば

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) = \frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\flat) $$

となることが示せる。困るのは(2)だ。二項係数の逆数の和には計算公式がない。定義を代入しても，シグマを用いて表してもうまくいかない。ここで注目してほしいのが前の設問(1)である。(1)は二項係数に関する等式(♭)を示した。(2)にも同じ二項係数が出てくるわけで，「何とか(2)に利用できないだろうか？」と考えてみよう。すると，(2)は「和を求める」ということと $\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ の部分が「1 つずれた値の差」となっていることから

$$ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) $$

$$ = 1 - \frac{1}{n+1} $$

が頭によぎるはず。つまり，この括弧の中身は同じようにして和を求めることができるわけだ。

このことを踏まえてじゃまな部分を右辺にもっていくと

$$ \frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}} $$

と二項係数の逆数が登場。そこで，右辺の組合せが ${}_{\bigcirc}\mathrm{C}_3$ となるように $k=2$ を代入すると

$$ \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} $$

両辺の $n=0$ から $n=m-3$ までの和をとれば

$$ \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} \right) $$

これより与えられた和は次のように求めることができる。

$$ \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) $$

$$ = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} \right) + \left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2} \right) \right\} $$

$$ = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} $$

本問のように，前の設問の利用の仕方が見えにくい場合でも，「利用するためにはどうしたらよいか ?」という観点で強引に考えることで道が開けてくる。行き詰まったら前の設問を眺めてみよう。

合 格 言

●方針が見えないときは前の設問とのつながりを考えよう

チェック

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手持ちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

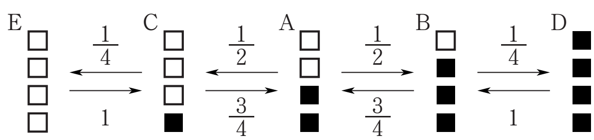
最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

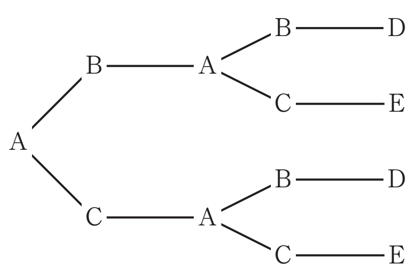
（東大・一部省略）

解　答

操作を繰り返したときのカードの移り変わりを図にすると



のようになるので，求める確率は



のいずれかのように推移する確率。これら 4 つの確率はすべて等しいので，まとめて計算すると

$$4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{16}}$$ **(答)**