添削問題解答解説

力学2

XQAE2A-11C1-01

1 問題

《運動方程式》

図1のように，天井から糸Cで軽くてなめらかな定滑車をつるす。定滑車には，十分に長い糸の両端にそれぞれ質量が M，$m(M>m)$ のおもりA，Bを結んだものをかける。初め，BはAより距離 h だけ低い位置にあるように支えておく。ただし，糸はいずれも軽くて伸び縮みしないものとする。また，糸はたるむことなく滑車に沿ってなめらかに移動するものとし，重力加速度の大きさを g とする。（25点）

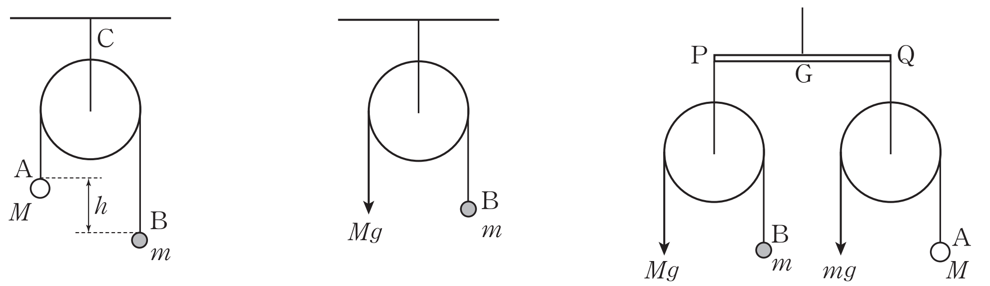


図1　　図2　　図3

問1　支えを静かに外したところ，2つのおもりはそれぞれ同じ大きさの加速度で運動した。このときの加速度の大きさを a とし，AとBを結ぶ糸の張力の大きさを T として，それぞれのおもりについて運動方程式を立てよ。（4点）

問2　**問1**のときの a と T の値を，それぞれ M，m，g を用いて表せ。（4点）

問3　**問1**でAとBが運動を始めた後，両者が同じ高さになった瞬間の，Aの速さ v を，M，m，g，h を用いて表せ。（4点）

問4　**問1**でAとBが運動している間，定滑車が糸Cから受ける張力の大きさ S を，M，m，g を用いて表せ。（4点）

問5　次に，図2のように，図1の状態からおもりBはそのままにして，質量 M のおもりAの代わりに，Aを結んでいた糸の端を鉛直下向きに大きさ Mg の力で引く。このときのBの加速度の大きさ a' を，M，m，g を用いて表せ。（4点）

問6　続いて，図3のように，均質で一様な太さの棒PQの中心Gを糸でつるす。初め，棒PQが水平になるように支えておく。棒PQの左端Pには図2と同じ状態の定滑車を下げ，**問5**と同様に糸の一方を大きさ Mg の力で引く。また，棒PQの右端Qには図1で用いたものと同じ定滑車を下げるが，ここでは，定滑車にかけた糸の一端に質量 M のおもりAを結び，糸の他端を鉛直下向きに大きさ mg の力で引く。おもりA，Bがそれぞれ運動を始めた状態から，棒PQの支えを外すと，棒はどのようになるか。次の①～③の中から最も適当なものを1つ選べ。さらに，その理由を説明せよ。（5点）

① 棒の左端 P が下がる。
② 棒の右端 Q が下がる。
③ 棒は水平のまま変化しない。

ポイント

運動方程式を立てるときは，おもりの運動の向きを，加速度や力の正の向きと定めるとよい。

解答

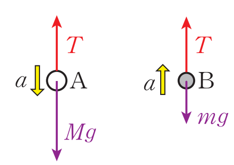
問 1　A ：$Ma=Mg-T$，B：$ma=T-mg$　　**問 2**　$a=\dfrac{M-m}{M+m}g$，$T=\dfrac{2Mmg}{M+m}$

問 3　$v=\sqrt{\dfrac{M-m}{M+m}gh}$　　**問 4**　$S=\dfrac{4Mmg}{M+m}$　　**問 5**　$a'=\dfrac{M-m}{m}g$

問 6　①，理由は「解説」参照

解説

問 1　A，B が受ける重力，張力，および加速度の関係は，右図のようになる。したがって，A，B について，それぞれ運動方程式を立てると



A：　$\boldsymbol{Ma=Mg-T}$　　**(答)**

B：　$\boldsymbol{ma=T-mg}$　　**(答)**

◀下向きを正とした。
◀上向きを正とした。

問 2　A，B の運動方程式を辺々たしあわせて T を消去すると

$$(M+m)a=(M-m)g$$

$$\therefore\quad a=\boldsymbol{\frac{M-m}{M+m}g}\qquad \textbf{(答)}$$

また，上式を A の運動方程式に代入して T を求めると

$$T=M(g-a)=\boldsymbol{\frac{2Mmg}{M+m}}\qquad \textbf{(答)}$$

◀B の運動方程式に代入して
$T=m(g+a)=\dfrac{2Mmg}{M+m}$
と求めてもよい。

問 3　運動中，同じ時間内における A の下降距離と B の上昇距離は等しいので，同じ高さになるのは A が $h/2$ 下がって B が $h/2$ 上がったときである。したがって，求める速さ v は，等加速度運動の式より

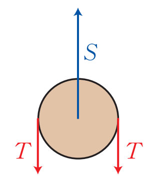
$$v^2-0^2=2a\cdot\frac{1}{2}h$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{ah}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{M-m}{M+m}gh}}\qquad \textbf{(答)}$$

◀**問 2** で得た a を代入した。

問 4　張力の大きさは糸のどの部分でも等しいから，定滑車の両端に接する位置での張力の大きさはともに T である(右図)。したがって，定滑車が受ける下向きの力の和の大きさは $2T$ であり，これと S がつり合うので

$$S=2T=\boldsymbol{\frac{4Mmg}{M+m}} \qquad \textbf{(答)}$$

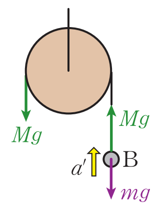


◀**問 2** で得た T を代入した。なお，$S=2T$ である理由については，「**研究**」参照。

問 5　B が受ける力には，下向きの重力 mg と上向きの糸の張力がある。ここで，張力の大きさは糸のどの部分でも等しいので，Mg である(右図)。したがって，B の運動方程式は，上向きを正として

$$ma'=Mg-mg$$

$$\therefore \quad a'=\boldsymbol{\frac{M-m}{m}g} \qquad \textbf{(答)}$$

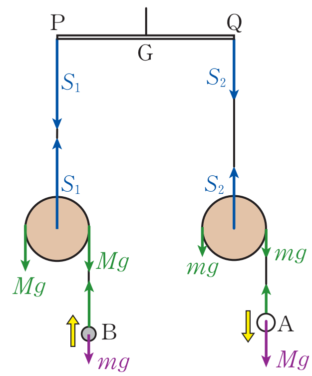


問 6　棒 PQ の支えを外す前の状態について考える。このとき P，Q が糸から受ける張力の大きさをそれぞれ S_1，S_2 とすると，P 側，Q 側の定滑車が糸から受ける張力は上向きで，それぞれ大きさ S_1，S_2 である。また，P 側の定滑車は B につないだ糸から下向きで大きさ $2Mg$ の力を，Q 側の定滑車は A につないだ糸から下向きで大きさ $2mg$ の力を受ける。よって，この 2 つの定滑車それぞれが受ける力のつり合いより

$$S_1=2Mg, \qquad S_2=2mg$$

ここで，$M>m$ より，$S_1>S_2$ である。したがって，この状態から棒 PQ の支えを外すと，棒の左端 P が下がる。すなわち

①　**(答)**



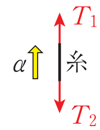
研究

問 6　PQ の支えを外す前の状態での，A(Q から定滑車を介してつるしたおもり)の加速度の大きさを a'' とする。このとき A が糸から受ける張力の大きさは mg であることに注意すると，A の運動方程式は，下向きを正として

$$Ma''=Mg-mg \qquad \therefore \quad a''=\frac{M-m}{M}g$$

一方，B(P から定滑車を介してつるしたおもり)の加速度の大きさは，**問 5** で求めた a' に等しい。

糸の張力がどこでも等しいこと

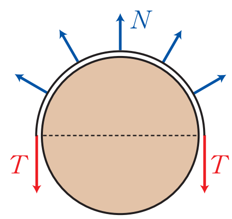


右図のように糸の一部を切り出し，この部分が上下から引かれる張力をそれぞれ T_1，T_2 とする。糸が大きさ α の加速度で上向きに運動するとき，糸の質量が無視できるならば，この部分の運動方程式は

$$0 \cdot \alpha = T_1 - T_2 \qquad \therefore \quad T_1 = T_2$$

上式は糸のどの部分でも成立するので，糸の張力はどこでも等しい。

$S=2T$ であること



定滑車をつるす糸(図 1 で糸 C)の張力の大きさを S，定滑車にかけた糸の張力の大きさを T とすると，$S=2T$ となる。このことを，「**解説**」では，定滑車が受ける力には，糸 C からの張力(大きさ S で上向き)と，定滑車にかけた糸からの張力の和(大きさ $2\times T$ で下向き)があり，これらがつり合うことから導いた。これをもう少し丁寧に考えてみよう。

このとき，定滑車の上半円部にかかっている糸の部分だけを切り出して考える。この部分の糸は，定滑車の各部から右上図のように垂直抗力を受けており，さらに半円(右上図の破線)より下の部分の糸から，両側でそれぞれ大きさ T の張力を受けている。上半円部にかかっている糸が落下しないのは，垂直抗力の合力(大きさ N)が，両側の 2 つの張力とつり合うからである。このことより，糸が定滑車から受ける垂直抗力の合力は上向きで，その大きさは $N=2T$ であることがわかる。次に，定滑車が受ける力のつり合いを考えると，定滑車が糸に及ぼす垂直抗力の反作用として，糸は定滑車に下向きに大きさ $N=2T$ の力を及ぼす。これと，定滑車をつっている糸 C による張力がつり合っているから，$\underline{S=2T}$ である。