問題

$f(x)=x^2+2x+a$ について，次の各問いに答えよ。　(25 点)

(1)　方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<1$ の範囲に実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。　(8 点)

(2)　(1)のとき，$I(a)=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$ の最小値，およびそのときの a の値を求めよ。　(17 点)

ポイント

文系入試では頻出の絶対値を含む定積分だが，被積分関数に定数を含むため，区間による場合分けをする際に影響を受ける。グラフが折り返されるときの x 座標をまともに a で表すのはうまくなさそうなので，**もう 1 文字こしらえて計算を進める（◀ 1）**のが得策。

解　答

(1)　$f(x)=(x+1)^2+a-1$ より，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，軸は $x=-1$ であるから，方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<1$ の範囲に実数解をもつためには

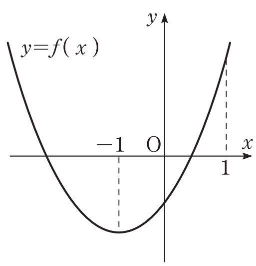
$$f(1)f(-1)<0$$

であればよい。ここで，$f(-1)=a-1$，$f(1)=a+3$ より

$$(a+3)(a-1)<0$$

だから，a のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-3<a<1}$$ 答



◀ $y=f(x)$ のグラフは $x=-1$ を軸とする放物線だから，方程式 $f(x)=0$ は $-1<x<1$ の範囲には実数解を多くとも 1 つしかもち得ない。

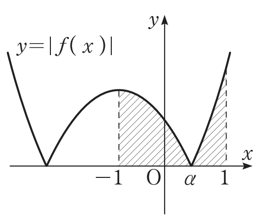
◀ $f(-1)<0$ かつ $f(1)>0$ でもよい。

(2)　$-3<a<1$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の $-1<x<1$ における解を α とすると

$$\alpha^2+2\alpha+a=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

　また，定積分 $I(a)$ の被積分関数は $|f(x)|$ であり，$y=|f(x)|$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフの $y\leqq 0$ の部分を x 軸に関して折り返したものであるから，上の図のようになる。よって



$$\begin{aligned}
I(a)&=-\int_{-1}^{\alpha}(x^2+2x+a)\,dx+\int_{\alpha}^{1}(x^2+2x+a)\,dx\\
&=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2+ax\right]_{-1}^{\alpha}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2+ax\right]_{\alpha}^{1}\\
&=-\left\{\left(\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2+a\alpha\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-a\right)\right\}\\
&\qquad+\left\{\left(\frac{1}{3}+1+a\right)-\left(\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2+a\alpha\right)\right\}
\end{aligned}$$

◀ 1
解は
$x=-1+\sqrt{1-a}$
であり，少し嫌な形をしている。このようなときにはいったん別の文字でおいて処理をするとよい。

◀ このように被積分関数のグラフを実際にかいてみると，定積分 $I(a)$ は左上の図の斜線部分の面積として捉えられるので考えやすいだろう。

$$= -2\left(\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^2+a\alpha\right)+\left(\frac{2}{3}-a\right)+\left(\frac{4}{3}+a\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\alpha^3-2\alpha^2-2a\alpha+2 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，①より

$$a=-\alpha^2-2\alpha \quad \cdots\cdots ③$$

となることを用いて②から a を消去すると

$$I(a)=-\frac{2}{3}\alpha^3-2\alpha^2-2(-\alpha^2-2\alpha)\alpha+2$$

$$=\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha^2+2$$

◀ a を消去し，$I(a)$ を α の関数とみて最小値を求める。

そして，上式の右辺を $g(\alpha)$ とおけば

$$g'(\alpha)=4\alpha^2+4\alpha$$
$$=4\alpha(\alpha+1)$$

となるから，$-1<\alpha<1$ における $g(\alpha)$ の増減は右の表のようになり，$g(\alpha)$ は，$\alpha=0$ のとき極小かつ最小となる。このとき，③より

α	-1		0		1
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		↘	2	↗	

◀ α は，$f(x)=0$ の $-1<x<1$ における解なので $-1<\alpha<1$

$$\boldsymbol{a=0} \quad \text{答}$$

◀ $-3<a<1$ をみたす。

であり，$I(a)$ の最小値は

$$\boldsymbol{2} \quad \text{答}$$

解　説

別解 (2)面積計算の工夫

$f(x)=0$ の α 以外の解を β とすると，解と係数の関係より

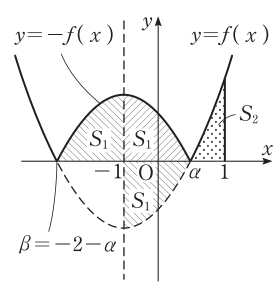
$$\alpha+\beta=-2 \qquad \therefore \quad \beta=-2-\alpha$$

となるから（2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ の，軸に関する対称性からもわかる）

$$f(x)=(x-\alpha)(x+2+\alpha)\ (=x^2+2x-\alpha(2+\alpha))$$

そして，右下の図の 3 つの斜線部分の面積は等しいので，これを S_1，打点部分の面積を S_2 とすると，$I(a)=S_1+S_2$ となり

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=-S_1+S_2,\quad \int_{\beta}^{\alpha}\{-f(x)\}\,dx=2S_1$$



であるから

$$I(a)=(-S_1+S_2)+2S_1$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_{\beta}^{\alpha}f(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}\{x^2-\alpha(2+\alpha)\}\,dx-\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=2\left[\frac{x^3}{3}-\alpha(2+\alpha)x\right]_0^1+\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$$
$$=\frac{2}{3}-2\alpha(2+\alpha)+\frac{(2\alpha+2)^3}{6}$$
$$=\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha^2+2$$

となる。

極　意

・煩わしいものはいったん別の文字でおく

本問のように，方程式の解を用いた計算を行う場合，解を求めてそれを早い段階で代入すると式が複雑になりがちである。このとき有効なのが別の文字への置き換えだ。式処理は最もシンプルな形で済ませておいて，カタがついたら最後に代入すればよい。

次のような，解と係数の関係を利用する方法が典型的な例である。

（例）座標平面上に，2 つの放物線

$$C_1 : y = (x - t)^2 + t$$

$$C_2 : y = -x^2 + 4$$

がある。ただし，t は実数とする。

(1)　C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるとき，t の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)のとき，C_1 と C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ。（宮崎大・改）

（解答）

(1)　2 曲線の方程式を連立して y を消去すると

$$(x - t)^2 + t = -x^2 + 4$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 2tx + t^2 + t - 4 = 0$$

この判別式を考えて

$$t^2 - 2(t^2 + t - 4) > 0$$

$$\therefore \quad -4 < t < 2 \quad \text{（答）}$$

(2)　2 曲線の交点の座標を $(\alpha,\ -\alpha^2 + 4)$，$(\beta,\ -\beta^2 + 4)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = t$$

$$\alpha\beta = \frac{t^2 + t - 4}{2}$$

であり，中点の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2},\ \frac{-\alpha^2 - \beta^2 + 8}{2}\right)$$

とおける。ここで

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = t^2 - (t^2 + t - 4) = -t + 4$$

であるから，中点の座標は

$$\left(\frac{t}{2},\ \frac{t}{2} + 2\right)$$

となる。よって，(1)の t の範囲を踏まえると，求める軌跡は

$$y = x + 2\ (-2 < x < 1) \quad \text{（答）}$$

である。