問題

a を実数の定数とする。座標平面上の 2 つの曲線

$$y=2x^2|x-2|,\ y=\frac{1}{2}x^2+x+a$$

の共有点の個数を，a の値で分類して求めよ。（25 点）

ポイント

曲線の方程式に未知の定数 a が含まれるので，a の値の変化によってグラフがどのように動くかを捉えることが必要。このとき，未知の部分をできるだけシンプルにする，「**定数分離（◀ 1）**」の手法が有効である。

解　答

$f(x)=2x^2|x-2|-\dfrac{1}{2}x^2-x$ とおくと，題意の共有点の個数は

曲線 $y=f(x)$，直線 $y=a$

の異なる共有点の個数に他ならない。$f(x)$ について，$x\leqq 2$ のとき

$$f(x)=-2x^2(x-2)-\frac{1}{2}x^2-x$$
$$=-2x^3+\frac{7}{2}x^2-x$$

であるから，これを $f_1(x)$ とおくと

$$f_1{}'(x)=-6x^2+7x-1$$
$$=-(6x-1)(x-1)$$

また，$x\geqq 2$ のとき

$$f(x)=2x^2(x-2)-\frac{1}{2}x^2-x$$
$$=2x^3-\frac{9}{2}x^2-x$$

であるから，これを $f_2(x)$ とおくと

$$f_2{}'(x)=6x^2-9x-1$$
$$=3x(2x-3)-1$$

$x\geqq 2$ においては

$$3x\geqq 6 \text{ かつ } 2x-3\geqq 1$$
$$\therefore\quad 3x(2x-3)\geqq 6$$

であるから

$$f_2{}'(x)>0$$

以上より，$f(x)$ の増減は右の表のようになり

x		$\frac{1}{6}$		1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

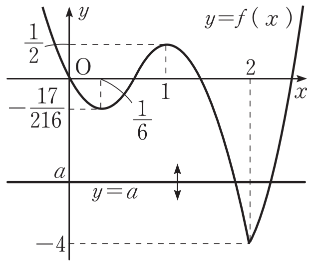
◀ 1
定数を分離する。この読み替えがポイント。

◀絶対値をはずすために場合分けをする。

◀もちろん，$y=f_2{}'(x)$ のグラフを考えてもよいが，このように変形すると $f_2{}'(x)$ の符号がすぐにわかる。

◀$f_2(x)$ は $x\geqq 2$ において極値をもたないということ。

$$f\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$= -2\cdot\frac{1}{216}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{36}-\frac{1}{6}$$
$$= -\frac{17}{216}$$
$$f(1) = -2+\frac{7}{2}-1=\frac{1}{2}$$
$$f(2) = -2\cdot 8+\frac{7}{2}\cdot 4-2$$
$$= -4$$



であるから，$y=f(x)$ のグラフは右上の図のようになる。したがって，これと直線 $y=a$ の共有点を考えると，求める共有点の個数は

$$\begin{cases} -\dfrac{17}{216}<a<\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ a=-\dfrac{17}{216},\ \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ -4<a<-\dfrac{17}{216},\ \dfrac{1}{2}<a \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a=-4 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a<-4 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

答

となる。

解　説

補足 **考え方のポイントを整理すると…**

本問では，2 曲線の共有点の個数を直接グラフから判断するのが難しいので，題意を

曲線と曲線の共有点の個数 ⟶ 曲線と直線の共有点の個数

と読み替えたのである。「**解答**」を見てもわかると思うが，曲線と直線の共有点の個数であれば，グラフから判断しやすいので，これを念頭に置いて考えたわけだ。なお，グラフから共有点の個数を判断できるように題意を読み替える際は

$$2x^2|x-2|=\frac{1}{2}x^2+x+a$$
$$\therefore\quad 2x^2|x-2|-\frac{1}{2}x^2-x=a$$

のように

(x の式)＝(文字定数 a を含む項)

と変形するのがポイントで，このような変形を「定数分離」という。グラフの共有点の個数を考える問題で有効となる考え方なので，しっかり身につけておいてほしい。

極　意

・グラフの動き方を捉える

本問は，文字の値の変化に伴ってグラフがどのように動くのかを捉えることが問われる問題であった。グラフや図形の動き方がカギになる問題では，まずはイメージをつかむことが大切。わか

りにくい場合には，具体的にいくつかの場合を取り出してみると考えやすくなることもある。

次の例は，図形を回転させたときに通過する領域を考える問題の基本である。

（例）原点をOとする座標平面上に，2点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ がある。線分ABがOを中心に1回転するときに通過する領域の面積を求めよ。

（考え方）まずはイメージをつかむこと。

・“回転”なので，線分上の点は円を描く

・ある点が回転してできる図形は，その点と原点との距離によって決まる

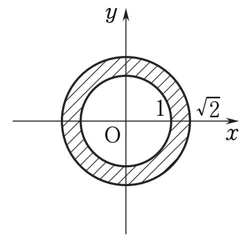
というところを把握できれば，求めるべき領域の形がわかってくる。

（解答）線分AB上の点PがOを中心に1回転するとき，その軌跡は原点を中心とする半径OPの円となる。OPが最小となるのは点Pの座標が $(0,\ 1)$ のときで，このとき

$$\mathrm{OP}=1$$

OPが最大となるのは点Pが点Aまたは点Bに一致するときで，このとき

$$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$$



OPの長さは1以上 $\sqrt{2}$ 以下のすべての値をとるから，線分が1回転したときの通過領域は右の図の斜線部分となる。よって，その面積は

$$\pi\cdot\{(\sqrt{2})^2-1^2\}=\pi \qquad \text{（答）}$$