必修テーマ

物理の「サイズ」

学習時間 30分

XQAR2A-Z1J1-01

到達目標

- 入試頻出の物理量について，およその桁数が把握できる。
- 数値計算問題で，有効数字を考慮した計算ができる。
- 次元解析にもとづき，数式が物理的に正しいかどうかを判断できる。

物理量のサイズ

例題 1

次の空欄（　ア　）～（　カ　）に入る適切な**整数**を答えよ。

[真空中での光の速さ] ≒ $3 \times 10^{(ア)}$ m/s

可視光の波長：$4 \times 10^{(イ)}$ m ～ $8 \times 10^{(ウ)}$ m

可聴音の振動数：$2 \times 10^{(エ)}$ Hz ～ $2 \times 10^{(オ)}$ Hz

[電気素量] ≒ $1.6 \times 10^{(カ)}$ C

解　答

ア　8　答　　◀ サイズ4

イ　−7　答

ウ　−7　答

エ　1　答

オ　4　答

カ　−19　答　　◀ サイズ5

チェックポイント

サイズ１：　物理量のサイズ（桁数）

物理系の学問では，細かな計算を行う前に，まずは何桁くらいの値なのかについて考えることが多い（この概算値の見積もりは，オーダーエスティメーションとよばれている）。たとえば，普段聞いている音の波長は，1 mm くらいなのか，1 m くらいなのか，それとも 1 km くらいなのかという問いに，パッと答えられるだろうか。

典型的な物理量のサイズ（桁数）は，この機会に覚えてしまおう。また，よく出てくる物理定数の値もあわせて確認しておこう。

物理が得意な人は，サイズや物理定数のおよその値を（結果的に）暗記している。サイズを知っていれば，数値計算問題で（文字通りの）桁違いの答を出したときに，どこかで間違えたことに気づくなど，実利的なメリットも大きい。以下では，押さえておくべき物理量とそのサイズ・値を挙げる。

サイズ２：　力学に関するサイズ

■ **[ヒトが歩く典型的な速さ] ≒ 1 m/s ＝ 3.6 km/h**

m/s と km/h の換算もすぐにできるようにしておこう。

■ **[重力加速度の大きさ] ≒ 9.8 m/s^2**

静かに放した物体は，1 秒後におよそ 10 m/s の速さになるということである。

■ **[ヒトが出す典型的な力の大きさ] ≒ 1 N，[ヒトがする典型的な仕事] ≒ 1 J**

ミカン 1 個を支える力がおよそ 1 N である（∵　0.1 kg × 9.8 m/s^2 ≒ 1 N）。また，ミカン 1 個を 1 m だけ持ち上げるときにする仕事(＝ミカンが得る重力の位置エネルギー)がおよそ 1 J である(∵　0.1 kg × 9.8 m/s^2 × 1 m ≒ 1 J)。

■ **[大気圧] ≒ 10^5 Pa**

地表の物体には，上空に存在する空気の重みがのしかかっている。これが大気圧の正体である。標準的な大気圧(1 気圧)は 1013 hPa である。なお，hPa の「h (ヘクト)」は100倍を意味する。

■ **[地球の半径] ≒ 6.4 × 10^6 m ＝ 6400 km**

地球 1 周の長さはおよそ 4 万 km である。

■ **[万有引力定数] ≒ 6.7 × 10^{-11} N･m^2/kg^2**

この値が非常に小さいので，相手が地球ぐらい重くないと，万有引力が実感できない。

サイズ３：　熱に関するサイズ

■ **[日常での典型的な温度] ≒ 300 K**

絶対零度(0 K)は，およそ −273℃ である。

■ **[水の比熱] ≒ 4.2 J/(g･K)**

1 g の水の温度を 1 K 上げるのに必要な熱が 4.2 J ということである。この熱量を 1 cal(カロリー)と表すこともある。

■ **[アボガドロ定数] ≒ 6 × 10^{23}/mol**

炭素(^{12}C) 1 mol(12 g)の中にある炭素原子の数がアボガドロ定数である。

サイズ４：　波に関するサイズ

■ **[真空中での光の速さ] ≒ 3 × 10^8 m/s ＝ 30万 km/s**

可視光の波長：4 × 10^{-7} m 〜 8 × 10^{-7} m (400 nm 〜 800 nm)

光の速さで進むと，1 秒間に地球を 7 周半する。可視光(ヒトに見える光)の波長は，赤橙黄緑青藍紫の順に短くなることも押さえておこう。

■ **[標準大気中での音の速さ] ≒ 340 m/s**

可聴音の振動数：20 Hz 〜 20000 Hz，可聴音の波長：2 cm 〜 20 m

可聴音(ヒトに聞こえる音)の波長は，日常で接するものと同程度のサイズなので，音は回折が起こりやすい。

サイズ５：　電気に関するサイズ

■ **[真空中でのクーロンの法則の比例定数] ≒ 9 × 10^9 N･m^2/C^2**

万有引力定数に比べて，実に20桁も大きい。

■ **[電気素量] ≒ 1.6 × 10^{-19} C**

電子のもつ電気量の絶対値のことである。

有効数字

例題２

問１　次の数値は有効数字何桁の表記か答えよ。

（1）　1.2　　（2）　12.30　　（3）　0.0012　　（4）　1200　　（5）　1.23×10^4

問２　有効数字を考慮して，次の計算をせよ。

（1）　$4.5+6.78$　　（2）　$45-6.78$　　（3）　45×6.78　　（4）　$45\div6.78$

解　答

問１

（1）　**２桁**　答

（2）　**４桁**　答

（3）　**２桁**　答

（4）　**４桁**　答

（5）　**３桁**　答

◀ 有効数字２

問２

（1）　$4.5+6.78=11.28\fallingdotseq\mathbf{11.3}$　答

（2）　$45-6.78=38.22\fallingdotseq\mathbf{38}$　答

（3）　$45\times6.78=305.10\fallingdotseq\mathbf{3.1\times10^2}$　答

（4）　$45\div6.78=6.63\cdots\fallingdotseq\mathbf{6.6}$　答

◀ 有効数字３

解　説

問１　(3)のような場合の０は有効数字には数えないが，(2)や(4)のような場合の０は有効数字に数える。なお，測定によって得た数値「1200」が実際には有効数字２桁である場合は，(5)のような表現を用いて，1.2×10^3 のように書く。

ところで，有効数字３桁の精度の値 12.3 と，有効数字４桁の精度の値 12.30 は，同じものではない。12.3 の小数第２位の値はまったく信用できないのに対し，12.30 の一番下の位“0”は小数第２位の値が“0”であるという意味をもっている。

問２　(1)では，小数第１位までが信頼できる桁であり，(2)では一の位までが信頼できる桁である。(3)は，有効数字２桁 × ３桁のかけ算なので，答は桁数が少ない方の有効数字２桁で表す。(4)も同様に，２桁 ÷ ３桁のわり算なので，有効数字２桁で答える。

チェックポイント

有効数字１：　有効数字の意味

たとえば，最小目盛りが 1 mm のものさしで長さを測る場合には，最小目盛りの10分の 1 まで目測で読むことになっている。このものさしで，あるものの長さを測ったとき「12.3mm」と読み取れたとすると，このとき一番下の位の“3”は目分量であるから，真の値 M は，$12.25 \leqq M < 12.35$ の範囲に含まれると考えられる。この場合，この測定値の小数第 2 位の値はまったく信用できないが，その 1 つ上の小数第 1 位の“3”はほぼ信用できる値だと考えてよい。したがって，「12.3mm」という値はほぼ信用できる値と考えてよく，「12.3」は 3 つの位をもつので，有効数字は 3 桁である，という。**有効数字は，その値がどれだけ信用できるかを示す**もので，桁数の多いものほど，精度が高い測定値であることを意味する。

有効数字２：　有効数字の表し方

有効数字を考慮して数値を表現する際，**［1 以上 10 未満の数値］$\times 10^n$**（n は整数）の形で表す。

⚠ 0.0123 は，1.23×10^{-2} と表せることからわかるように，有効数字 3 桁である。「0.0」は位取りの部分なので，ここは有効数字の桁には数えない。

⚠ 1.23×10^{-1} のように，$n = -1$ の場合，「0.123」のように 0.…と書くこともある。

⚠ 1.23×10^{1} のように，有効数字 2 桁以上かつ $n = 1$ の場合，「12.3」のように書くこともある。

有効数字３：　有効数字を考慮した計算法

■和・差は，そのまま計算した後，四捨五入し，末尾の位の最も高いものにそろえる。

$$12.34 + 5.6 - 7.89$$

の計算を行ってみよう。3 つの数値の末尾の位を比べると，「5.6」の末尾の位“6”が小数第 1 位なので一番位が高い。上の計算をそのまま行うと 10.05 となるが，「5.6」の小数第 2 位以下が不明であるため，10.05 の小数第 2 位以下は信用できない。そこで，計算結果の末尾の位が小数第 1 位になるように，すぐ下の位(小数第 2 位)を四捨五入して，以下のように表す。

$$12.34 + 5.6 - 7.89 = 10.05 \fallingdotseq 10.1$$

なお，**和・差の場合は有効数字の桁数が増減することがある**ので，注意が必要である。

⚠ 2 桁→1 桁に減る例　：$12 - 3.4 = 8.6 \fallingdotseq 9$ ← 12 の小数第 1 位以下が信用できないため。

⚠ 2 桁→3 桁に増える例：$5.6 + 7.8 = 13.4$　←小数第 1 位以上はすべて信用できるため。

■積・商は，そのまま計算した後，四捨五入し，有効数字の桁数の最も少ないものにそろえる。

$$12.3 \times 45, \qquad 12.3 \div 45$$

の計算を行ってみよう。2 つの数値のうち「45」の方が有効数字が少なく，2 桁である。計算をそのまま行うと，それぞれ 553.5，0.2733…となるが，精度を考えれば上から 3 桁目以下は信用できない。そこで，有効数字 2 桁になるように，すぐ下の位(有効数字 3 桁目)を四捨五入すれば

$$12.3 \times 45 = 553.5 \fallingdotseq 5.5 \times 10^2, \qquad 12.3 \div 45 = 0.2733\cdots \fallingdotseq 0.27$$

なお，**途中計算では有効数字の桁数より 1 桁多くとって**(それより下は四捨五入して)**計算**するのが慣例で，最後に桁数をそろえる。計算順序などの違いにより，計算結果が多少異なる場合があるが，正しいやり方で計算をしていれば，試験ではどれも正解となる。問題を解く際，数値が模範解答と多少(一番下の位で ±1 程度)違っても，気にしなくてよい。

次元解析

例題３

国際単位系(通称 SI)は，〔m〕(メートル。長さの単位)，〔kg〕(キログラム。質量の単位)，〔s〕(秒。時間の単位)，〔A〕(アンペア。電流の強さの単位)などを基本単位とする単位系であり，物理に出てくる単位は，一部の例外を除き，この 4 つの基本単位を組み合わせて表すことができる。次の単位を，基本単位〔m〕，〔kg〕，〔s〕，〔A〕の組合せで表せ。

(1)　〔N〕(ニュートン)　(2)　〔J〕(ジュール)　(3)　〔Pa〕(パスカル)
(4)　〔W〕(ワット)　(5)　〔C〕(クーロン)　(6)　〔V〕(ボルト)

解　答

(1)　〔N〕＝**〔kg・m/s^2〕** 答
(2)　〔J〕＝**〔kg・m^2/s^2〕** 答
(3)　〔Pa〕＝**〔kg/(m・s^2)〕** 答
(4)　〔W〕＝**〔kg・m^2/s^3〕** 答
(5)　〔C〕＝**〔A・s〕** 答
(6)　〔V〕＝**〔kg・m^2/(A・s^3)〕** 答

◀ 次元解析２
なお，〔m〕，〔kg〕，〔s〕，〔A〕の並び順は気にしなくてもよい(どれを最初に書いてもよい)。
◀ 次元解析３

解　説

(1)では運動方程式 $\vec{F}=m\vec{a}$([力]＝[質量]×[加速度])，(2)では重力による位置エネルギーを表す mgh([質量]×[重力加速度の大きさ]×[基準点からの高さ])などの式を思い浮かべるとよい。(3)は圧力が単位面積当たりの力であること，(4)は仕事率が単位時間当たりの仕事(エネルギー)であることに注目しよう。(5)は，電流が単位時間に導線の断面を通過する電気量として定義されることから導かれる。(6)は，電位が単位電荷当たりの位置エネルギーであることから導かれる。

チェックポイント

次元解析１：　次元解析とは何か

たとえば，「ばねの伸びを求めよ」という問題に対して「$k(x-l)$」という答を出した場合，その答はほぼ確実に間違っている（ここで，k はばね定数，x や l は長さを表す量とする)。なぜなら，正しい答は「$x-l$」のように長さの次元をもつはずなのに，「$k(x-l)$」は力の次元をもつからである。また，m を質量，v を速さとして「mv^2-kx」という式を立てた場合，その式は物理学的に意味のない(したがって，間違っている)可能性が高い。なぜなら，第一項はエネルギー，第二項は力という別の次元をもつからである。このように，次元解析の考え方が身についていれば，立式・計算ミスを防ぎ，また，計算結果を確かめるのに，絶大な威力を発揮する。

次元解析とは，物理量がもつべき次元(単位)を考えることによって，物理学的に適切な式を導き出す手法のことである。例として，長さ l の糸に質量 m のおもりをつるした単振り子の周期 T が，重力加速度の大きさを g として，次のように表されると仮定して，T の式を導いてみよう。

$$T = A \times l^{\alpha} \times m^{\beta} \times g^{\gamma}$$

ここで，A は次元をもたない(無次元の)比例定数であり，α，β，γ は次元をもたない定数である。左辺の単位は，周期なので〔s〕である。一方，右辺の単位は，l が長さ，m が質量，g が加速度の次元をもつので

$$[\mathrm{m}^{\alpha}] \times [\mathrm{kg}^{\beta}] \times [(\mathrm{m/s^2})^{\gamma}] = [\mathrm{m}^{\alpha+\gamma}\mathrm{kg}^{\beta}\mathrm{s}^{-2\gamma}]$$

物理の式では両辺の次元が等しいことから，$\alpha+\gamma=0$，$\beta=0$，$-2\gamma=1$ の関係が成り立つ。よって，$\alpha=1/2$，$\beta=0$，$\gamma=-1/2$ であり，$T=A\sqrt{l/g}$ が得られる。$A=2\pi$ とすれば，お馴染みの単振り子の周期の公式と一致する。この例からもわかるように，**次元解析では**，次元をもつ物理量の指数は一意に定められても，A のような**無次元の比例定数は定めることができない**。しかし，この手法を用いると，「単振り子の周期は $2\pi\sqrt{l/g}$ だったか，それとも $2\pi\sqrt{g/l}$ だったか……」と度忘れしたときでも，すぐに式を導くことができる。

なお，国際単位系では，**物理量の単位は，基本単位〔m〕，〔kg〕，〔s〕，〔A〕，〔K〕(温度)，〔mol〕(物質量)，〔cd〕(光度)の組合せで表す**。ちなみに，はね返り係数や摩擦係数，屈折率，熱効率，比誘電率などのように，無次元の物理量も少なからず存在する。以下では，最低限押さえておくべき物理量とその単位を挙げる。

次元解析２：　力学に関する単位

■**速さ：〔m/s〕，加速度：〔$\mathrm{m/s^2}$〕**

加速度は，単位時間当たりの速度の変化量である。

■**力：〔N〕=〔$\mathrm{kg \cdot m/s^2}$〕，圧力：〔Pa〕=〔$\mathrm{kg/(m \cdot s^2)}$〕**

力の次元は，運動方程式を思い出すとよい。圧力は，単位面積当たりの力である。

■**エネルギー（仕事）：〔J〕=〔N・m〕=〔$\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$〕，仕事率：〔W〕=〔$\mathrm{kg \cdot m^2/s^3}$〕**

力と距離の積が仕事である。仕事率は，単位時間当たりの仕事である。

■**運動量（力積）：〔N・s〕=〔kg・m/s〕**

運動量の変化量は力積に等しいため，両者は同じ次元をもつ。

■**振動数：〔Hz〕=〔1/s〕**

振動数は，単位時間当たりの振動回数である。

次元解析３：　電気に関する単位

■**電気量：〔C〕=〔A・s〕**

電流の定義は，単位時間当たりに通過する電気量である。

■**電場：〔N/C〕=〔$\mathrm{kg \cdot m/(A \cdot s^3)}$〕**

電場は，単位正電荷が受ける力である。

■**電位：〔V〕=〔J/C〕=〔$\mathrm{kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)}$〕**

電位は，単位電荷当たりの位置エネルギーである。

■**抵抗値：〔Ω〕=〔$\mathrm{kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)}$〕**

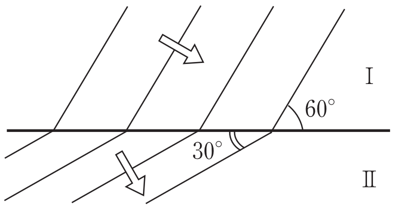
オームの法則［電圧］=［抵抗値］×［電流］から導出できる。

なお，基本単位を組み合わせた表式については，覚えておく必要はなく，必要に応じて導くことができれば十分である。

記述力・考察力確認問題

問　題

問１　図のように，境界面で分けられた，水深が異なる領域Ⅰと領域Ⅱがあり，領域Ⅰの水深は **3.0 m** である。領域Ⅰから領域Ⅱに向かって領域Ⅰ内を進む波面と境界面のなす角度が **60°** になるように，平面波を入射させたところ，領域Ⅱ内を進む屈折波は，その波面が境界面と角度 **30°** をなす向きに進んでいった。ただし，平面波の伝わる速さは水深の平方根に比例するものとし，必要なら，$\sqrt{2}=1.41$，$\sqrt{3}=1.73$ とせよ。



この平面波について，領域Ⅰに対する領域Ⅱの屈折率 n を求めよ。また，領域Ⅰ内を進む平面波の速さが **2.0 m/s**，振動数が **0.50 Hz** のとき，領域Ⅱ内を進む平面波の速さ v_2，波長 λ_2，および水深 h_2 を，それぞれ求めよ。

問２　**次元解析によって**，弦を伝わる波の速さ v を，弦の線密度 ρ と弦の張力の大きさ S を用いて表せ。ただし，次元をもたない比例定数を A とせよ。

解　答

問１　波面と波の進行方向は垂直なので，境界面への入射角は 60°，屈折角は 30° である。よって，屈折の法則より

$$n=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}=1.73\fallingdotseq \mathbf{1.7}\quad \boxed{答}\ \cdots\cdots①$$

①と屈折の法則より

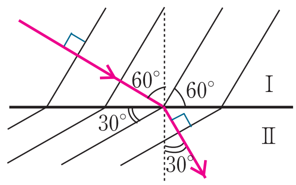
$$n=\frac{2.0\,\mathrm{m/s}}{v_2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad v_2=\frac{2.0\,\mathrm{m/s}}{\sqrt{3}}=\frac{2.0\,\mathrm{m/s}\times 1.73}{3}$$

$$\fallingdotseq 1.15\cdots\mathrm{m/s}\fallingdotseq \mathbf{1.2\,m/s}\quad \boxed{答}$$

Ⅰにおける波長を λ_1 とすると

$$2.0\,\mathrm{m/s}=0.50\,\mathrm{Hz}\times\lambda_1\qquad \therefore\quad \lambda_1=\frac{2.0\,\mathrm{m/s}}{0.50\,\mathrm{Hz}}=4.0\,\mathrm{m}$$



有効数字３
問題文に与えられている角度が有効数字２桁なので，有効数字２桁で答える。

よって，①と屈折の法則より

$$n=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{4.0\,\mathrm{m}}{\lambda_2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \lambda_2=\frac{4.0\,\mathrm{m}}{\sqrt{3}}=\frac{4.0\,\mathrm{m}\times 1.73}{3}\fallingdotseq 2.30\cdots\mathrm{m}\fallingdotseq \mathbf{2.3\,m}$$ 答

Ⅰの水深を $h_1(=3.0\,\mathrm{m})$ とすると，この平面波の速さは水深の平方根に比例すること，①，および，屈折の法則より

$$n=\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}}=\frac{\sqrt{3.0\,\mathrm{m}}}{\sqrt{h_2}}=\sqrt{3}\qquad \therefore\quad h_2=\mathbf{1.0\,m}$$ 答

問２　α，β を定数として，v は次のように書くことができる。

$$v=A\times\rho^{\alpha}\times S^{\beta}$$

したがって，両辺の単位について

$$[\mathrm{m^1 s^{-1}}]=[(\mathrm{kg/m})^{\alpha}]\times[(\mathrm{kg\cdot m/s^2})^{\beta}]$$
$$=[\mathrm{m}^{-\alpha+\beta}\mathrm{kg}^{\alpha+\beta}\mathrm{s}^{-2\beta}]$$

単位の指数を比較することにより

$$-\alpha+\beta=1,\qquad \alpha+\beta=0,\qquad -2\beta=-1$$

$$\therefore\quad \alpha=-\frac{1}{2},\qquad \beta=\frac{1}{2}$$

以上より

$$v=A\times\rho^{-\frac{1}{2}}\times S^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{A\sqrt{\frac{S}{\rho}}}$$ 答

次元解析２
速さの単位は〔m/s〕，線密度の単位は〔kg/m〕，力の単位は〔N〕=〔$\mathrm{kg\cdot m/s^2}$〕である。

次元解析１
A は次元解析では定めることができないが，理論的な考察により，$A=1$ であることが知られている。

答案作成時の注意

問１では，問題文中に与えられた物理量はすべて有効数字２桁であり，数値どうしの計算はかけ算とわり算のみなので，答はすべて有効数字２桁で表す必要がある。途中計算では，有効数字の桁数より１桁多くとって計算するのが慣例なので，v_2 や λ_2 を計算する際は注意しよう。

なお，波長が水深に比べて十分に大きい波のことを長波といい，長波の場合，**問１**の設定のように，波の伝わる速さ v が水深 h の平方根に比例する。長波では，重力加速度の大きさを g とすると，$v=\sqrt{gh}$ の関係が成り立っている。津波は，波長が数 km ～数百 km の長波なので，深いところほど速く伝わり，水深 4 km のところでは 200 m/s とジェット機並みの速さで伝わる。