第３問

解　説

(1)　A を原点として，xy 平面を考えると，ボールが地点 A，B を通ることより

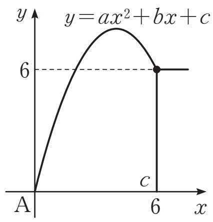
$$y = ax^2 + bx + c$$

のグラフは，原点と点 (6，6) を通るので

$$0 = c$$

$$6 = 36a + 6b + c$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{b = 1 - 6a,\ c = 0} \quad ⇨ ⑥，①$$



(2)　(1)より，y は

$$y = ax^2 + (1 - 6a)x \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる。ボールが $x = 4$ の地点で $y = 6$ となるとき，グラフは点 (4，6) を通るので

$$6 = 16a + 4(1 - 6a)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{4}}$$

また，①は

$$y = a\left(x + \frac{1-6a}{2a}\right)^2 - \frac{(1-6a)^2}{4a}$$

と変形できるので，ボールの高さが $x = \dfrac{9}{2}$ の地点で最大になるとき

$$-\frac{1-6a}{2a} = \frac{9}{2}$$

$$-1 + 6a = 9a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{3}}$$

よって，ボールの高さの最大値は $-\dfrac{(1-6a)^2}{4a}$ に $a = -\dfrac{1}{3}$ を代入して

$$-\frac{(1+2)^2}{-\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \ (\mathrm{m})$$

(3)(i)　ボールの高さの最大値が 8 m より高くならないことから

$$-\frac{(1-6a)^2}{4a} \leqq 8$$

$a < 0$ より

$$-(1-6a)^2 \geqq 32a$$

$$0 \geqq 36a^2 + 20a + 1$$

$$0 \geqq (18a+1)(2a+1)$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leqq a \leqq -\frac{1}{18}$$

また，花子さんが落下するボールをキャッチすることより

◀できなかったらココを復習！
xy 平面上の条件に直す（「**考え方 1**」参照）

◀建物の高さは 6 m より。

◀グラフの頂点の x 座標が $x = \dfrac{9}{2}$ となる。

◀グラフの頂点の y 座標が高さの最大値となる。

◀グラフの頂点の y 座標が 8 以下であればよい。

◀グラフの頂点の x 座標が 6 より小さければよい。

$$-\frac{1-6a}{2a}<6$$

$a<0$ より

$$-1+6a>12a$$

$$\therefore\quad a<-\frac{1}{6}$$

以上より，a のとり得る値の範囲は

$$-\frac{1}{2}\leqq a<-\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots ②$$

(ii) ②を満たす a について，各地点におけるボールの高さが最も大きくなるような a の値を求める。

できなかったらココを復習！

まず，a の値を定める（「**考え方 2**」参照）

$-\frac{1}{2}\leqq a_1<a_2\leqq-\frac{1}{6}$ とし

$$f_1(x)=a_1x^2+(1-6a_1)x$$
$$f_2(x)=a_2x^2+(1-6a_2)x$$

とすると

$$f_2(x)-f_1(x)=(a_2-a_1)x^2-6(a_2-a_1)x$$
$$=(a_2-a_1)x(x-6)$$

であるから，$0<x<6$ のとき

$$f_2(x)-f_1(x)<0$$
$$\therefore\quad f_2(x)<f_1(x)$$

$x(x-6)<0$

$a_2-a_1>0$

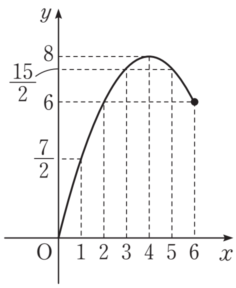
より。

となる。よって，$a=-\frac{1}{2}$ のとき，各地点におけるボールの高さが最も大きくなるので，このときボールをキャッチできるかどうかを調べればよい。

$a=-\frac{1}{2}$ のとき，①より

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$$
$$=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。ここで



$$f(d)>h$$

ならばキャッチできるので，(A)～(E)についてキャッチできるのは

(B), (C), (D)

のみである。 ⇨ ⑦

ボールの高さがフェンスの高さを越えればよい。

考え方

1 補足 xy 平面上の条件に直す

本問はボール投げの問題であり

ボールの軌道は上に凸の放物線になること

が与えられており，さらに軌道を

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a < 0)$$

のようにモデル化することが指示されているので，これに従って考えていけばよい。このとき

太郎さんがボールを投げる → ボールが地点 A を通る → グラフが原点を通る

花子さんがキャッチできる → ボールが地点 B を通る → グラフが点 (6, 6) を通る

のように，与えられた条件を

xy 平面上の条件に直す

ことがポイントといえる。

2 補足 まず，a の値を定める

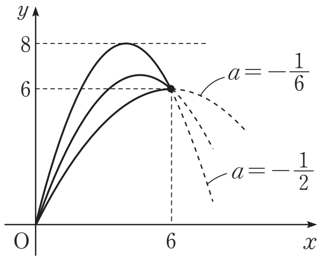
(3)(ii) では，$F(x) = ax^2 + (1-6a)x$ とおくと

$F(d) > h$ を満たす a が②に存在するならば，ボールをキャッチできる

と条件を読み替えることがポイント。このとき，②のもとで①のグラフを考えるわけだが，「**解説**」で示したように

$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき，各地点におけるボールの高さが最も大きくなる

ことがわかる。これより，$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき，ボールをキャッチできるかどうかを調べれば十分なわけである。



これに気づかない場合は，それぞれの d の値についてボールの高さのとり得る値の範囲を求めてもよい。すなわち，$d = 3$ のとき

$$F(3) = 3 - 9a$$

②より

$$\frac{9}{2} < F(3) \leqq \frac{15}{2}$$

よって，$F(3) > 8$ となる a は存在せず，$F(3) > 7$ となる a は存在するので，(A)は不適で，(B)は適する。

$d = 5$ のとき

$$F(5) = 5 - 5a$$

②より

$$\frac{35}{6} < F(5) \leqq \frac{15}{2}$$

よって，$F(5) > 7$ となる a は存在するので，(C)は適する。

$d = 2$ のとき

$$F(2) = 2 - 8a$$

②より

$$\frac{10}{3} < F(2) \leqq 6$$

よって，$F(2) > 5$ となる a は存在するので，(D)は適する。

$d = 1$ のとき

$$F(1) = 1 - 5a$$

②より

$$\frac{11}{6} < F(1) \leqq \frac{7}{2}$$

よって，$F(1) > 4$ となる a は存在しないので，(E)は不適。