第 1 問

解　説

(1)　A(3, 0, 0)，B(3, 4, 0) より，辺 AB の中点 P の座標は

$$\mathbf{P(3,\ 2,\ 0)}$$

◀ $\left(\frac{3+3}{2},\ \frac{0+4}{2},\ \frac{0+0}{2}\right)$

(2)　点 Q は辺 DG 上の DQ < GQ を満たす点だから

$$Q(0,\ q,\ 2)\quad (0 \leqq q < 2)$$

とおける。(1)より

$$\overrightarrow{PQ} = (-3,\ q-2,\ 2)$$

であるから，$PQ = \sqrt{14}$ より

$$(-3)^2 + (q-2)^2 + 2^2 = 14$$

$$\therefore\quad (q-2)^2 = 1$$

◀ $(q-2)^2$ は展開せずに処理するのがうまい。

$0 \leqq q < 2$ より

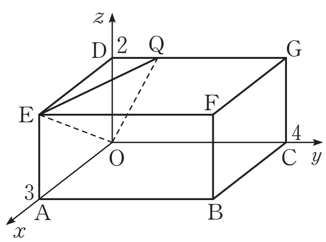
$$q = 1$$

$$\therefore\quad \mathbf{Q(0,\ 1,\ 2)}$$

(3)　(i)　DH ⊥ (平面 OEQ) より，$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{OQ}$ であるから

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OQ} = \mathbf{0}$$

(ii)　DO ⊥ DE，DO ⊥ DQ，DE ⊥ DQ および，DO = 2，DE = 3，DQ = 1 より，四面体 DOEQ の体積は



$$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\right) = \mathbf{1}$$

◀直角三角形 ODQ を底面とみた。

(iii)　$\overrightarrow{OE} = (3,\ 0,\ 2)$ で，(2)より，$\overrightarrow{OQ} = (0,\ 1,\ 2)$ であるから

$$|\overrightarrow{OE}|^2 = 3^2 + 0^2 + 2^2 = 13$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OQ} = 3\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 = 4$$

よって，△OEQ の面積は

$$\triangle OEQ = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OE}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{65-16}$$

$$= \mathbf{\frac{7}{2}}$$

これと，(ii)より

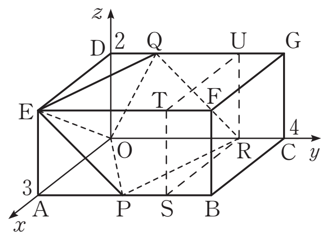
$$\frac{1}{3}DH\cdot\frac{7}{2} = 1$$

◀ (四面体 DOEQ の体積) $= \frac{1}{3}DH\cdot\triangle OEQ$

$$\therefore\quad DH = \mathbf{\frac{6}{7}}$$

となる。

(4)　平面 EPQ と y 軸の交点を R とすると，四角形 EPRQ は平行四辺形なので



$$\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{PR}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{EQ}$$

(1)，(2)より，$\overrightarrow{OP}=(3,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{EQ}=(-3,\ 1,\ 0)$ だから

$$\overrightarrow{OR}=(0,\ 3,\ 0)$$

◀**できなかったらココを復習！**
批判的考察（「**考え方 1**」参照）。以下，図形の性質をフルに活用して，数式処理の手間を省く工夫を行う。

　ここで，点 R を通る平面 $y=3$ と辺 AB，EF，DG の交点をそれぞれ S，T，U とおくと，対称性より，平面 EPQ(平行四辺形 EPRQ) によって直方体 OASR − DETU は合同な二つの六面体に分けられる。このうち，原点 O を含む六面体から四面体 DOEQ と四面体 AOEP を除いた図形が四角錐 O − EPRQ であり，その体積を V とおくと

◀対称性を利用できる図形を取り出す。

$$V=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\cdot2-1-\frac{1}{3}\cdot3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\right)$$
$$=6$$

◀(3)(ii)より，四面体 DOEQ の体積は 1 であり，四面体 AOEP の体積は
（四面体 AOEP）
$=\frac{1}{3}\mathrm{OA}\cdot\triangle\mathrm{APE}$
である。

また，$\overrightarrow{EP}=(0,\ 2,\ -2)$ より

$$|\overrightarrow{EP}|^2=0^2+2^2+(-2)^2=8$$
$$|\overrightarrow{EQ}|^2=(-3)^2+1^2+0^2=10$$
$$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EQ}=0\cdot(-3)+2\cdot1+(-2)\cdot0=2$$

であるから，平行四辺形 EPRQ の面積 S は

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{EP}|^2|\overrightarrow{EQ}|^2-(\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EQ})^2}=\sqrt{8\cdot10-4}$$
$$=2\sqrt{19}$$

◀ $S=2\triangle\mathrm{EPQ}$

したがって，O から平面 EPQ に下ろした垂線 OM の長さは

$$V=\frac{1}{3}\mathrm{OM}\cdot S$$

$$\therefore\quad \mathrm{OM}=\frac{3V}{S}=\frac{9\sqrt{19}}{19}$$

考え方

1 補足 批判的考察

二つの方針のそれぞれについて振り返り，良さを吟味し，新たな問題の解決の糸口を探る。

今月は『数学の事象』を題材として，批判的考察を主題とした問題への取り組み方を学習する。共通テストで問われる重要な資質能力として

「解決過程を振り返るなどして得られた結果を基に批判的に検討し，
体系的に組み立てていくことができる」

がある。「批判的」と聞くと negative なイメージを抱く人もいるかもしれないが

肯定的，否定的という両方の観点から最適解を導き出す思考

のことである。皆さんもご存知の通り，高校数学では「別解」が存在する問題が多いが，複数ある方針から自分にとって最適な方針を選択することは，批判的考察の一つといえる。10 月に学習した

発展・一般化というステップと同様に

　　『数学の事象』では，**批判的考察というステップを踏む問題が作りやすい**

のである。もちろん，作りやすいというのは，**出題されやすい**ということにも繋がることは言うまでもない。

本問では(3)の二つの方針

　　方針 1：数式処理

　　方針 2：図形処理

の解決過程を批判的に考察し，(4)の解決の糸口を探り出すのがポイントであった。

「解説」では方針 2 の図形処理を選択したが，図形処理は気づくまでに時間を費やしてしまう恐れもある。共通テストでは時間の余裕もないので，図形処理に気づかなければ方針 1 の数式処理の方針を選ぶ方が賢明だろう（この方法は「**考え方 2**」で紹介しよう）。

2 別解 (4)を方針 1 で解く

(4)を数式処理で解いておこう。

M は平面 EPQ 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+u\overrightarrow{\mathrm{EP}}+v\overrightarrow{\mathrm{EQ}}\quad(u,\ v\text{ は実数})$$

と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(3,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=(0,\ 2,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=(-3,\ 1,\ 0)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=(3,\ 0,\ 2)+u(0,\ 2,\ -2)+v(-3,\ 1,\ 0)\\&=(3-3v,\ 2u+v,\ 2-2u)\end{aligned}$$

そして，OM ⊥ (平面 EPQ) より，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=0$ であるから

$$0\cdot(3-3v)+2\cdot(2u+v)-2(2-2u)=0$$

$$\therefore\quad 4u+v-2=0$$

$$-3\cdot(3-3v)+1\cdot(2u+v)+0\cdot(2-2u)=0$$

$$\therefore\quad 2u+10v-9=0$$

これより

$$u=\frac{11}{38},\quad v=\frac{16}{19}$$

であるから

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2&=(3-3v)^2+(2u+v)^2+(2-2u)^2\\&=9\left(1-\frac{16}{19}\right)^2+\left(\frac{11}{19}+\frac{16}{19}\right)^2+\left(2-\frac{11}{19}\right)^2\\&=\frac{3^4}{19^2}+\frac{3^6}{19^2}+\frac{3^6}{19^2}\\&=\frac{3^4(1+9+9)}{19^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OM}=\frac{9\sqrt{19}}{19}$$

もちろん，M の座標を求めてもよい（原点 O を始点とするので，成分表示と同じである）。

なお，数式処理する場合も，上記のように共通因数でまとめるなどの計算の工夫はほしいところだ（工夫のない計算は時間と労力の無駄だけでなく，計算ミスもしやすい）。