

(1) 2
9 / 12

次の各問に答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

(25点)

(1) $x > 1$ のとき、 $\log x < \sqrt{x}$ が成り立つことを示し、極限値 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ。

(12点)

(2) 3つの正の数 a, b, c が

$$a^{bc} = b^{ca} = c^{ab}$$

をみたすとき、 a, b, c のうち少なくとも2つは等しいことを示せ。

(13点)

(2) 3
0 / 13(1) $f(x) = \log x - \sqrt{x}$ とする。 $f(x)$ が " $x > 1$ " 常に負になることをいえよ。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$

 $x > 1$ のとき $2x > 0$ なので $g(x) = 2 - \sqrt{x}$ の符号を考える $x = 4$ のとき

$$g(x) = 0$$

増減表にしておくといい

 $x < 4$ "

$$g(x) > 0$$

 $x > 4$ "

$$g(x) < 0$$

x	1	4	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	0	↘

よって $x > 1$ のとき $f(x) \leq 0$ がいえるので成り立つ $(\because 2 - \sqrt{4})$ $x > 1$ も条件に加えよう $\log x < \sqrt{x}$ より $\frac{\log x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$ 不等式には乘する数の正負に気をつけよう。
 $x > \sqrt{x}$ より $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ 不定形で Δ 従って $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ と同じはさみうちの原理を用いるために $0 < \frac{\log x}{x}$ もみさえせよ \triangle

(2) 辺々対数をとると

$$bc \log a = ca \log b = ab \log c \quad \text{二の辺々に } \frac{1}{abc} \text{ を乗じると}$$

$$bc \log a = ca \log b \quad \text{より } b \log a = a \log b \quad \frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b} = \frac{\log c}{c} \text{ となり}$$

この式は左ねに成り立つのでありません $\rightarrow \therefore a = b$ (1)で根式の形がでてきます。たとえば $a = 2, b = 4$ とする $4 \log 2 = 2 \times 2 \log 2 = 2 \log 4$ 同様に $b = c$ $h(x) = \frac{\log x}{x}$ とするとよって $a^{bc} = b^{ca} = c^{ab}$ が成り立つとき

$$a = b = c$$

<合格への手>

本問では(1)と(2)の見方とが違うもの

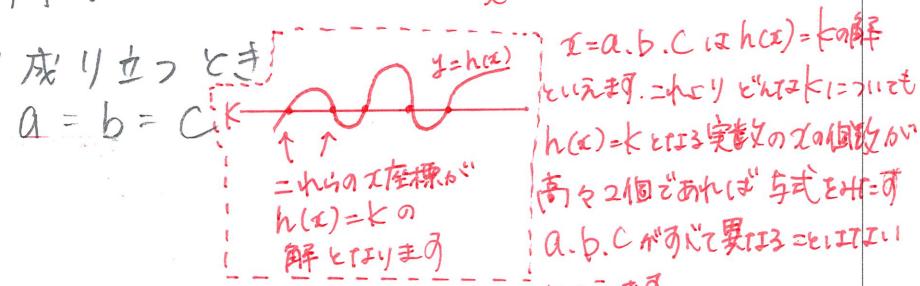
実は誘導によっている」という点に気が付いた

どうかが大きはホイントでした。

「指数と対数で関連づけて考えられていいか?」

「(1)と似た形が出てきたので、(1)を利用できてもいい?」

「どの発想を普段から意識しておくといい?」

そこで、 $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフをかいて調べておきましょう

〔「極意」を確認しましょう〕