

微積分

XMAD7A-Z1D1

総得点 39 / 50

1

XMAD7A-11C1

a を実数の定数とする。 x の 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 6ax$ について、次の各問いに答えよ。
(以下略) (25 点)

(1) 2 / 4

(2) 4 / 4

(3) 16 / 17

$$(1) f'(x) = 3x^2 + 6ax + 6a = 3(x^2 + 2ax + 2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とする } x \text{ の値は } x = -a \pm \sqrt{a^2 - 2a}$$

$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = a^2 - 2a \geq 0$$

$a \leq 0$ または $a \geq 2$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a$$

$f'(x) = 0$ の重解

を求めると、

$f(x)$ の増減は

x	α	x
$f'(x)$	$+$	0
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

となり、 $f(x)$ は極値

をとる。

$$\text{余りは } (4a - 2a^2)x - 2a^2$$

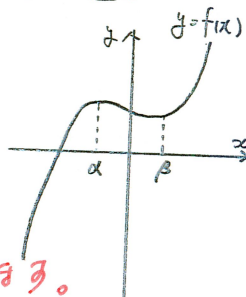
(3) α, β は $f'(x) = 0$ の解である

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 - 2a}$$

$x = \alpha$ は極大値、 $x = \beta$ は極小値をとる

$$\alpha = -a - \sqrt{a^2 - 2a}$$

$$\beta = -a + \sqrt{a^2 - 2a}$$



(3) の計算では (2) を利用して

計算の手間を省くことができる。

極値をとる x の値 α, β は $f'(x) = 0$ の解であり

(2) より

$$f(x) = f'(x) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a \right) + (4a - 2a^2)x - 2a^2$$

となることを用いる。極値の差を計算する

問題は歩み出るので、ぜひ使えるようにしておこう。

J. 7

$$f(\alpha) = (-a - \sqrt{a^2 - 2a})^3 + 3a(-a - \sqrt{a^2 - 2a})^2 + 6a(-a - \sqrt{a^2 - 2a})$$

$$= -a^3 - 3a^2\sqrt{a^2 - 2a} - 3a(a^2 - 2a) - (a^2 - 2a)\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$+ 3a(a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 2a} + a^2 - 2a) - 6a^2 - 6a\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$= -a^3 - 3a^2\sqrt{a^2 - 2a} + 3a^3 + 3a^2 - 6a^2 - 6a\sqrt{a^2 - 2a}$$

計算間違い

$$= 2a^3 - 3a^2 + (2a^2 - 4a)\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$f(\beta) = (-a + \sqrt{a^2 - 2a})^3 + 3a(-a + \sqrt{a^2 - 2a})^2 + 6a(-a + \sqrt{a^2 - 2a})$$

$$= -a^3 + 3a^2\sqrt{a^2 - 2a} - 3a(a^2 - 2a) + (a^2 - 2a)\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$+ 3a(a^2 - 2a\sqrt{a^2 - 2a} + a^2 - 2a) - 6a^2 + 6a\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$= -a^3 + 3a^2\sqrt{a^2 - 2a} - 3a^3 + 3a^2 - 6a^2 + 6a\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$+ \sqrt{a^2 - 2a}(3a^2 + a^2 - 2a - 6a^2 + 6a)$$

$$= 2a^3 - 3a^2 + (-2a^2 + 4a)\sqrt{a^2 - 2a}$$

$$f(\alpha) - f(\beta) = (4a^2 - 8a)\sqrt{a^2 - 2a} = 12\sqrt{3} \text{ となる}$$

$$(a^2 - 2a)\sqrt{a^2 - 2a} = 3\sqrt{3}$$

J. 7

$$a^2 - 2a = 3$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a - 3)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 3$$

$y = x^3$ の単調増加

であることより、実数 A, B に対し

$A^3 = B^3 \Rightarrow A = B$

となることを利用して

で可。二つの値

を求めるには

$$(a^2 - 2a)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$

といった変形を

して、

(※解答欄は裏面に続きます。)