

(1) 3
5/6(2) 4
2/5(3) 5
2/14自然数 n に対して

$$x^2 - y^2 = n^2 \quad \text{..... ①}$$

をみたす自然数 x, y について考える。

(25点)

(1) $n = 3, 4$ のとき、①をみたす自然数 x, y の組 (x, y) をそれぞれ求めよ。(6点)(2) 3以上の任意の自然数 n に対して、①をみたす自然数 x, y の組 (x, y) が存在することを証明せよ。(5点)(3) $n \geq 3$ のとき、①をみたす自然数 x, y の組 (x, y) がただ1組存在するための必要十分条件は、 n または $\frac{n}{2}$ が素数であることを証明せよ。(14点)

$$(1) n=3 \text{ のとき } x^2 - y^2 = 3^2 = 9$$

$$(x-y)(x+y) = 9$$

$$\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\text{よって } (x, y) = (5, 4)$$

$x+y > 0$ より $x-y > 0$ もわかります。
 $x+y > x-y > 0$ より絞りこんだことを
 述べておきましょう。 $\triangle$

$$n=4 \text{ のとき } (x-y)(x+y) = 16$$

$$\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ より } x = \frac{17}{2} \text{ ではないので不適} \quad \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ より } (x, y) = (5, 3)$$

「 $x-y, x+y$ の偶奇が一対一致する」を示せば
 こちらの組のみに絞りこめます。

(2) 数学的帰納法で証明する。

(1) より、 $n = 3, 4$ で成立する。 $n = k$ のとき成立、つまり

$$(x+y)(x-y) = k^2 \text{ より } x = \frac{k^2+1}{2}, y = \frac{k^2-1}{2} \text{ が自然数であると仮定する。}$$

k は3以上の奇数としておきましょう。

k が偶数のとき、(*)で表される x, y は自然数になりません。 $\triangle$

 $n = k+2$ のとき

$$X = \frac{(k+2)^2+1}{2}, Y = \frac{(k+2)^2-1}{2} \text{ とおくと}$$

$$X = \frac{k^2+4k+4+1}{2} = k + 2k + 2$$

$$Y = \frac{k^2+4k+4-1}{2} = k + 2k + 2$$

よって X, Y も自然数で

$$X^2 - Y^2 = \left\{ \frac{(k+2)^2+1}{2} + \frac{(k+2)^2-1}{2} \right\} \cdot \left\{ \frac{(k+2)^2+1}{2} - \frac{(k+2)^2-1}{2} \right\}$$

$$= (k+2)^2$$

よって成立

$n = k$ で成立するとき $n = k+2$ でも成立することがいえたので

①をみたす自然数 x, y の組は存在する。 //

(*)

n が偶数のときは、
 $n = 2m$ (m は2以上の自然数)として

$$\begin{cases} x+y=2m^2 \\ x-y=2 \end{cases}$$

とすると、 $x = m^2 + 1, y = m^2 - 1$

これが自然数であると仮定するとよいでしょう。

前の設問で具体例が
 与えられている場合は、
 次の設問を考える際の
 ヒントになっていることが
 多いです。
 誘導を活かして考えてみましょう。

(3) (i) n が素数のとき、 n^2 の約数は $1, n, n^2$ のみである。

$$(x-y)(x+y) = n^2 \text{ で } x+y > x-y \text{ より}$$

$$x = \frac{n^2+1}{2}, y = \frac{n^2-1}{2}$$

n^2 も素数ではないので $n^2 \pm 1$ は偶数

よって $\frac{n^2 \pm 1}{2}$ は自然数といえるので ①をみたす自然数の組はただ1組存在する。 //

ここで「奇数」とします。

素数は1とその数のみを約数にもつ数であることを注意しましょう。

(i) の場合の他、(ii) 3以上の素数でない奇数のとき

(iii) 偶数だが $\frac{n}{2}$ が素数のとき(iv) “ $\frac{n}{2}$ が素数でない自然数のとき

に/かけて言っておきましょう。

<合格への一手>

証明問題では

・示すべきものは何か

・何を述べれば示せたことになるのか

をしっかりと示さることが重要です。

問題文から読みとれるように

整理しておきましょう。