

5 YMAPNA-Z1C5

20/25

$a > 0$ とする。また、実数 x, y は $x^2 + 4y^2 \leq 1$ をみたすとする。このとき、 $2xy + ax + 2ay$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。(25 点)

$$2y = z \text{ とおくと } x^2 + 4y^2 \leq 1, 2xy + ax + 2ay \text{ は}$$

$$x^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{--- ①}, \quad xz + a(x+z) \quad \text{--- ②}$$

と表せる。

$$x+z = X, xz = Y \text{ とおくと}$$

$$\text{① は } (x+z)^2 - 2xz \leq 1 \quad \therefore X^2 - 2Y \leq 1 \quad \text{--- ①'}$$

$$\text{② は } Y + aX \quad \text{--- ②'}$$

と表せる。

また、 x, z は S の方程式

$$S^2 - (x+z)S + xz = 0 \quad \therefore S^2 - XS + Y = 0 \quad \text{--- ③}$$

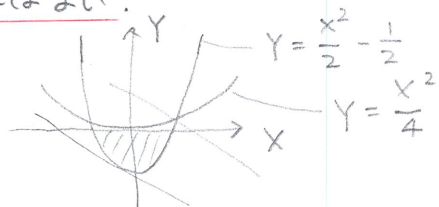
の 2 実数解なので

③ の判別式を D とすると

$$D = X^2 - 4Y \geq 0 \quad \text{--- ④}$$

以上より ②' を k とおいて、 XY 平面で ①' と ④ と

直線 $k = Y + aX$ すなわち $Y = -aX + k$ が
共有点をもつときの k の最大値と最小値を
考えればよい。



↑
グラフを利用して考えやすくしている点が
非常にいいです。

k が最大となるのは、 $Y = -aX + k$ が、 $Y = \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2}$ と

$Y = \frac{X^2}{4}$ の交点 $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ を通るとき。

よって k の最大値は

$$k = \sqrt{2}a + \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

このとき ③ は

$$S^2 - \sqrt{2}S + \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore (S - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 0$$

これより

$$(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) \quad (\text{答})$$

k が最小となるのは、 $Y = -aX + k$ が $Y = \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2}$ と

接するとき、このとき

$$-aX + k = \frac{X^2}{2} - \frac{1}{2} \quad \therefore X^2 + 2aX - 2k - 1 = 0 \quad \text{--- ⑤}$$

の判別式は 0 である、すなわち

$$a^2 - (-2k - 1) = 0 \quad \therefore k = \frac{-a^2 - 1}{2}$$

よって k の最小値は

$$k = \frac{-a^2 - 1}{2} \quad (\text{答})$$

このとき ⑤ は

$$X^2 + 2aX + a^2 = 0 \quad \therefore (X + a)^2 = 0$$

これより

$$X = -a$$

$$\text{よって } Y = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$$

このとき ③ は

$$S^2 + aS + \frac{1}{2}(a^2 - 1) = 0$$

これより

$$(x, y) = (\frac{-a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{-a \mp \sqrt{2-a^2}}{4}) \quad (\text{符号同順}) \quad \leftarrow \text{忘れないうえに!}$$

→ 対称式であることに注目したのである。

→ x, y についての条件により、

X, Y のとり得る値の範囲が

制限されることがあります。

置換をした場合は、つねに気をつけよう。

<合格への一手>

x と $2y$ の対称式であることに着目して
答えが作成できています。最小値の考察で
 a についての場合分けができていたところでは
あと一手でして。(小さくして可)

文字定数を含む直線や曲線の式を扱う
場合は、定数の値によってグラフの形状が
変化することに注意しておきましょう

これは正しいのですが、 $Y = -aX + k$ の傾きの値に
よっては、 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ を通るとき最小にはなりません。
あり得る。「解答」のように、きちんと場合分けをして、
おののけようにしましょう。

(※解答欄は以上です。裏面にある「答案感想欄」にもご記入ください。)

②谷折り

①山折り