6 YMBB7A-Z1C2

(1) 2 9/12

(2) 3 0/13

次の各問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。 (25 点)

(1) $x>1$ のとき，$\log x<\sqrt{x}$ が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。 (12 点)

(2) 3 つの正の数 a，b，c が

$$a^{bc}=b^{ca}=c^{ab}$$

をみたすとき，a，b，c のうち少なくとも 2 つは等しいことを示せ。 (13 点)

(1) $f(x)=\log x-\sqrt{x}$ とする。$f(x)$ が $x>1$ で常に負になることをいえばよい。

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

$x>1$ のとき $2x>0$ なので $g(x)=2-\sqrt{x}$ の符号を考える

$x=4$ のとき $g(x)=0$

$x<4$ 〃 $g(x)>0$

$x>4$ 〃 $g(x)<0$

増減表にしておくとよいでしょう

x	1		4	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	0	↘

($\because 2-\sqrt{4}$)

よって $x>1$ のとき $f(x)\leqq 0$ がいえるので成り立つ

$x>1$ も条件に加えます

$\log x<\sqrt{x}$ より $\frac{\log x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}$

不等式では乗ずる数の正負に気をつけます

$x>\sqrt{x}$ より $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$

不定形です △1

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ としましょう

従って $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

はさみうちの原理を用いるためには $0<\frac{\log x}{x}$ もおさえましょう △2

(2) 辺々対数をとると

$bc\log a=ca\log b=ab\log c$

この辺々に $\frac{1}{abc}$ を乗じると

$bc\log a=ca\log b$ より $b\log a=a\log b$ $\frac{\log a}{a}=\frac{\log b}{b}=\frac{\log c}{c}$ となり

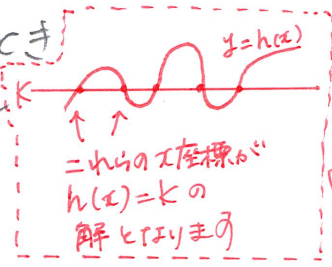
この式はつねに成り立つわけではありません
たとえば $a=2$，$b=4$ とすると
$4\log 2=2\times 2\log 2=2\log 4$

$\therefore a=b$ (1)で扱った式の形がでてきますね。

同様に $b=c$ $h(x)=\frac{\log x}{x}$ とすると

よって $a^{bc}=b^{ca}=c^{ab}$ が成り立つとき

$a=b=c$



$x=a,b,c$ は $h(x)=k$ の解といえます。これより どんな k についても $h(x)=k$ となる実数の x の個数が高々2個であれば 与式をみたす a,b,c がすべて異なることはないといえます。

そこで，$y=\frac{\log x}{x}$ のグラフをかいて調べてみましょう

[「極意」を確認しましょう]

〈合格への一手〉

本問では「(1)と(2)の見た目が違うものの実は誘導になっている」という点に気づけたかどうかが大きなポイントでした。

「指数と対数で関連づけて考えられないか?」

「(1)と似た形が出てきたので，(1)を利用できないか?」

などの発想を普段から意識しておくとよいでしょう。