微積分

XMAD7A-Z1D1

総得点 39/50

1 XMAD7A-11C1

(1) 1: 2/4

(2) 2: 4/4

(3) 3: 16/17

a を実数の定数とする。x の 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 6ax$ について，次の各問いに答えよ。 (25 点)

(以下略)

(1) $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 6a$

$= 3(x^2 + 2ax + 2a)$

$f'(x) = 0$ となる x があればよいから

判別式 $\frac{D}{4} = a^2 - 2a \geqq 0$ −2

よって

$a \leqq 0$ または $a \geqq 2$

$f'(x)=0$ が重解 α をもつとき，$f(x)$ の増減は

x		α	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

となり，$f(x)$ は極値をもちません。

(2)

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a \\ 3x^2+6ax+6a \overline{\big) x^3+3ax^2+6ax} \\ x^3+2ax^2+2ax \\ \hline ax^2+4ax \quad 0 \\ ax^2+2a^2x+2a^2 \\ \hline (4a-2a^2)x-2a^2 \end{array}$$

余りは $(4a-2a^2)x - 2a^2$

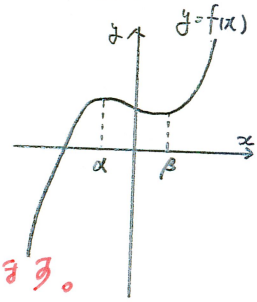
(3) α, β は $f'(x)=0$ の解なので

$x = -a \pm \sqrt{a^2-2a}$

$x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるから

$\alpha = -a - \sqrt{a^2-2a}$

$\beta = -a + \sqrt{a^2-2a}$



(3)の計算では(2)を利用して計算の手間を省くことができます。極値をとる x の値 α, β は $f'(x)=0$ の解であり(2)より

$f(x) = f'(x)(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a) + (4a-2a^2)x - 2a^2$

となることを用います。極値の差を計算する問題は頻出なので，ぜひ使えるようにしておきましょう。

よって

$f(\alpha) = (-a-\sqrt{a^2-2a})^3 + 3a(-a-\sqrt{a^2-2a})^2 + 6a(-a-\sqrt{a^2-2a})$

$= -a^3 - 3a^2\sqrt{a^2-2a} - 3a(a^2-2a) - (a^2-2a)\sqrt{a^2-2a}$

$+ 3a(a^2 + 2a\sqrt{a^2-2a} + a^2-2a) - 6a^2 - 6a\sqrt{a^2-2a}$

$= -a^3 - 3a^3 + 6a^2 + 3a^3 + 3a^2 - 6a^2 - 6a^2$

$+ \sqrt{a^2-2a}(-3a^2 - a^2 + 2a + 6a^2 - 6a)$

$= 2a^3 - 3a^2 + (2a^2-4a)\sqrt{a^2-2a}$

計算間違い −1

$f(\beta) = (-a+\sqrt{a^2-2a})^3 + 3a(-a+\sqrt{a^2-2a})^2 + 6a(-a+\sqrt{a^2-2a})$

$= -a^3 + 3a^2\sqrt{a^2-2a} - 3a(a^2-2a) + (a^2-2a)\sqrt{a^2-2a}$

$+ 3a(a^2 - 2a\sqrt{a^2-2a} + a^2-2a) - 6a^2 + 6a\sqrt{a^2-2a}$

$= -a^3 - 3a^3 + 6a^2 + 3a^3 + 3a^2 - 6a^2 - 6a^2$

$+ \sqrt{a^2-2a}(3a^2 + a^2 - 2a - 6a^2 + 6a)$

$= 2a^3 - 3a^2 + (-2a^2+4a)\sqrt{a^2-2a}$

$f(\alpha) - f(\beta) = (4a^2-8a)\sqrt{a^2-2a} = 12\sqrt{3}$ なので

$(a^2-2a)\sqrt{a^2-2a} = 3\sqrt{3}$

よって

$a^2 - 2a = 3$

$a^2 - 2a - 3 = 0$

$(a-3)(a+1) = 0$

$\therefore a = 3, -1$

$y=x^3$ が単調増加であることより，実数 A, B に対して

$A^3 = B^3 \Rightarrow A = B$

となることを利用したのですね。このことがわかるように

$(a^2-2a)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

といったん変形するとよいでしょう。

(※解答欄は裏面に続きます。)

数学