

(1) 3  
5/6

(2) 4  
2/5

(3) 5  
2/14

自然数  $n$  に対して

$$x^2 - y^2 = n^2 \quad \text{..... ①}$$

をみたす自然数  $x, y$  について考える。

(25 点)

(1)  $n = 3, 4$  のとき、①をみたす自然数  $x, y$  の組  $(x, y)$  をそれぞれ求めよ。

(6 点)

(2) 3 以上の任意の自然数  $n$  に対して、①をみたす自然数  $x, y$  の組  $(x, y)$  が存在することを証明せよ。

(5 点)

(3)  $n \geq 3$  のとき、①をみたす自然数  $x, y$  の組  $(x, y)$  がただ 1 組存在するための必要十分条件は、 $n$  または  $\frac{n}{2}$  が素数であることを証明せよ。

(14 点)

(1)  $n = 3$  のとき  $x^2 - y^2 = 3^2 = 9$

$$(x-y)(x+y) = 9$$

$$\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ より } (x, y) = (5, 4)$$

$x+y > 0$  より  $x-y > 0$  もわかります。  
 $x+y > x-y > 0$  より交わりこんだことを述べておきましょう。  $\triangle$

$n = 4$  のとき  $(x-y)(x+y) = 16$

$$\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ より } x = \frac{17}{2} \text{ ではないので不適} \quad \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ より } (x, y) = (5, 3)$$

「 $x-y, x+y$  の偶奇が一対一致する」を示せばこちらの組のみに絞れます。

(2) 数学的帰納法で証明する。

(i) より、 $n = 3, 4$  で成立する。

$n = k$  のとき成立、つまり

$$(x+y)(x-y) = k^2 \text{ より } x = \frac{k^2+1}{2}, y = \frac{k^2-1}{2} \text{ が自然数であると仮定する。}$$

$k$  は 3 以上の奇数としておきましょう。

$k$  が偶数のとき、(\*)で表される  $x, y$  は自然数になりません。  $\triangle$

$n = k+2$  のとき

$$X = \frac{(k+2)^2+1}{2}, Y = \frac{(k+2)^2-1}{2} \text{ とおくと}$$

$$X = \frac{k^2+4k+4+1}{2} = x+2k+2$$

$$Y = \frac{k^2+4k+4-1}{2} = y+2k+2$$

より  $X, Y$  も自然数で

$$X^2 - Y^2 = \left\{ \frac{(k+2)^2+1}{2} + \frac{(k+2)^2-1}{2} \right\} \cdot \left\{ \frac{(k+2)^2+1}{2} - \frac{(k+2)^2-1}{2} \right\} = (k+2)^2$$

より成立

$n = k$  で成立するとき  $n = k+2$  でも成立することがいえただで

①をみたす自然数  $x, y$  の組は存在する。 //

(\*)

$k$  が偶数のときは、 $n = 2m$  ( $m$  は 2 以上の自然数) として

$$\begin{cases} x+y=2m^2 \\ x-y=2 \end{cases}$$

とすると、 $x = m^2+1, y = m^2-1$

これが自然数であると仮定するとよいでしょう。

前の設問で具体例が与えられている場合は、次の設問を考える際のヒントになっていることが多いです。誘導を活かして考えてみましょう。

(3) (i)  $n$  が素数のとき、 $n^2$  の約数は  $1, n, n^2$  のみである。

$$(x-y)(x+y) = n^2 \text{ で } x+y > x-y \text{ より}$$

$$x = \frac{n^2+1}{2}, y = \frac{n^2-1}{2}$$

$n^2$  も素数ではないので  $n^2 \pm 1$  は偶数

よって  $\frac{n^2 \pm 1}{2}$  は自然数といえるので ①をみたす自然数の組はただ 1 組存在する。 //

ここで「奇数」とします。

素数は 1 とその数のみを約数にもつ数であることを注意しましょう。

(i) の場合の他、(ii) 3 以上の素数でない奇数のとき

(iii) 偶数だが  $\frac{n}{2}$  が素数のとき

(iv) “  $\frac{n}{2}$  が素数でない自然数のとき

に/かけて言っておきましょう。

<合格への一手>

証明問題では

・示すべきものは何か

・何を述べれば示せたことになるのか

をしっかりとらせることが重要です。

問題文から読みとれるように

整理しておきましょう。