

5 YMAPNA-Z1C5

20/25

$a > 0$ とする。また、実数 x, y は $x^2 + 4y^2 \leq 1$ をみたすとする。このとき、 $2xy + ax + 2ay$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。(25 点)

$2y = z$ とおくと $x^2 + 4y^2 \leq 1$, $2xy + ax + 2ay$ は
 $x^2 + z^2 \leq 1$ — ①, $xz + a(x+z)$ — ②

と表せる。

$x+z = X, xz = Y$ とおくと

① は $(x+z)^2 - 2xz \leq 1 \quad \therefore X^2 - 2Y \leq 1$ — ①'

② は $Y + aX$ — ②'

と表せる。

また x, z は S の方程式

$S^2 - (x+z)S + xz = 0 \quad \therefore S^2 - XS + Y = 0$ — ③

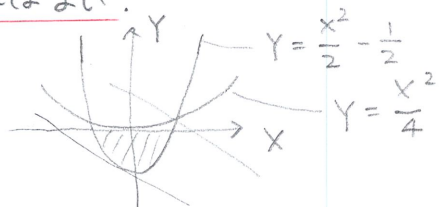
の 2 実数解なので

③ の判別式を D とすると

$D = X^2 - 4Y \geq 0$ — ④

以上より ②' を k とおいて、 XY 平面で ①' と ④ と

直線 $k = Y + aX$ すなわち $Y = -aX + k$ が
 共有点をもつときの k の最大値と最小値を
 考えればよい。



↑
 グラフを利用して考えやすくしている点が
 非常にいいです。

k が最大となるのは、 $Y = -aX + k$ が $Y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ と

$Y = \frac{x^2}{4}$ の交点 $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ を通るとき。

よって k の最大値は

$k = \sqrt{2}a + \frac{1}{2}$ (答)

このとき ③ は

$S^2 - \sqrt{2}S + \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore (S - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 0$

これより

$(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ (答)

k が最小となるのは、 $Y = -aX + k$ が $Y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ と

接するとき、このとき

$-aX + k = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \quad \therefore x^2 + 2ax - 2k - 1 = 0$ — ⑤

の判別式は 0 である、すなわち

$a^2 - (-2k - 1) = 0 \quad \therefore k = \frac{-a^2 - 1}{2}$

よって k の最小値は

$k = \frac{-a^2 - 1}{2}$ (答)

このとき ⑤ は

$x^2 + 2ax + a^2 = 0 \quad \therefore (x + a)^2 = 0$

これより

$x = -a$

よって $Y = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$

このとき ③ は

$S^2 + aS + \frac{1}{2}(a^2 - 1) = 0$

これより

$(x, y) = (\frac{-a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{-a \mp \sqrt{2-a^2}}{4})$ (複号同順) (答)

これは正しいのですが、 $Y = -aX + k$ の傾きの値に
 よっては、 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ を通るとき最小に成る場合が
 あります。「解答」のように、きちんと場合分けをして、
 ちゃんとしたようにしましょう。

(※解答欄は以上です。裏面にある「答案感想欄」にもご記入ください。)

②谷折り

①山折り