4 YMBB7A-Z1C2

(1) 2 8/8

(2) 3 7/17

$f(x)=x^2+2x+a$ について，次の各問いに答えよ。 (25 点)

(1) 方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<1$ の範囲に実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。 (8 点)

(2) (1)のとき，$I(a)=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$ の最小値，およびそのときの a の値を求めよ。 (17 点)

(1) $f(x)=x^2+2x+a$

$=(x+1)^2-1+a$

軸 $x=-1$

$D/4=1^2-a>0$

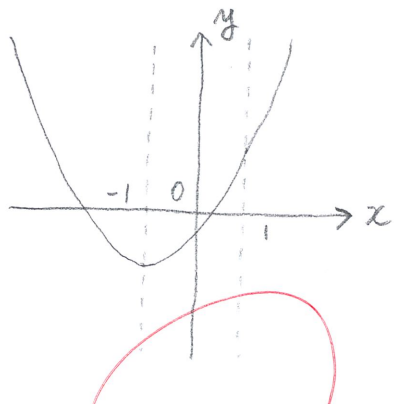
$a<1$ …①

$f(-1)=1-2+a<0$

$a<1$ …②

$f(1)=1+2+a>0$

$a>-3$ …③



よって $-3<a<1$

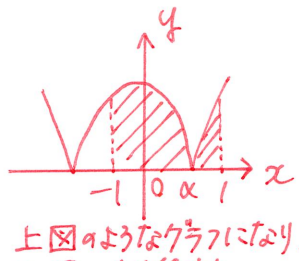
軸が $x=-1$ であることから、③をみたせば必ず $y=f(x)$ は x 軸と2点で交わるので、この場合は①を調べなくてもよいことになります。

面積を求めるときは立式(*)の根拠としてグラフをかくようにしましょう。

(2) $x^2+2x+a=0$

$x=-1\pm\sqrt{1-a}$ +2

$I(a)=\int_{-1}^{-1+\sqrt{1-a}}(-x^2-2x-a)\,dx+\int_{-1+\sqrt{1-a}}^{1}(x^2+2x+a)\,dx$ *



上図のようなグラフになり、面積は斜線部となります。

$-1+\sqrt{1-a}$ のまま計算していくと式が煩雑になりミスもしやすくなります。

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2-ax\right]_{-1}^{-1+\sqrt{1-a}}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+ax\right]_{-1+\sqrt{1-a}}^{1}$ +5

$=-\frac{1}{3}(-1+\sqrt{1-a})^3-(-1+\sqrt{1-a})^2-a(-1+\sqrt{1-a})-(\frac{1}{3}-1+ax)$

$+\frac{1}{3}+1+ax-\left\{\frac{1}{3}(-1+\sqrt{1-a})^3+(-1+\sqrt{1-a})^2+a(-1+\sqrt{1-a})\right\}$

$=-\frac{1}{3}(-1+\sqrt{1-a})^3-2(-1+\sqrt{1-a})^2-2a(-1+\sqrt{1-a})+2$

ここは2です

$=-\frac{1}{3}\left\{-1+3(1-a)-3\sqrt{1-a}+(1-a)\sqrt{1-a}\right\}-2\left\{1-2\sqrt{1-a}+(1-a)\right\}$

$+2a-2a\sqrt{1-a}+2$

符号は慎重に。

$=\frac{1}{3}-(1-a)+\sqrt{1-a}-\frac{1}{3}(1-a)\sqrt{1-a}-2+4\sqrt{1-a}-2(1-a)+2a-2a\sqrt{1-a}+2$

行き詰まってしまったようですね。ここは $\alpha=-1+\sqrt{1-a}$ とおいて α のまま積分計算をします。増減を調べる際の微分も α のまま計算しましょう。

〈合格への一手〉

扱う式が複雑なときには、文字の有用性を最大限に利用したいところです。
本問のように方程式の解が分数や無理数になる場合のほか、
単純に式が長い場合にも、時間短縮には有効です。
"できるだけシンプルな形で処理する"という観点を身につけておきましょう。