見通しの立て方

到達目標

見慣れない設定の問題で，何を手がかりにしたらよいかわからないときがある。そんなときは試行錯誤しながらその場で方針をさぐらなければならないが，その試行錯誤の際には

・簡単な例（具体例）をかいてみる
・状況を図にしてみる
・前の設問の利用を考えてみる

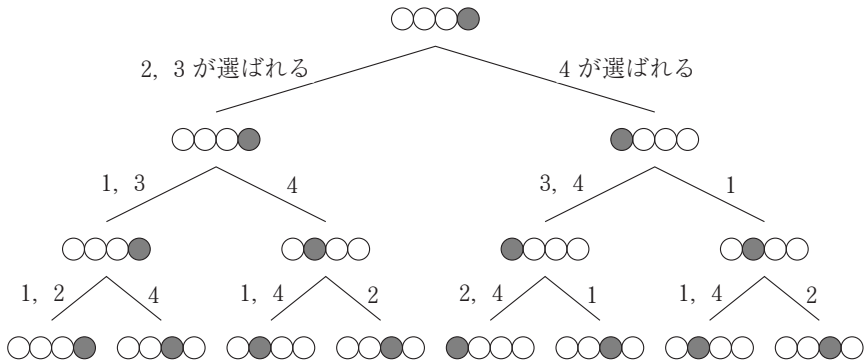
を意識するとよい。今回はこの 3 つの手法を確認し，それぞれの考え方をマスターしよう。

簡単な例をかいてみる

具体例などの簡単な例を考えると実際にどのようになるのかを見ることができるので，状況を捉えるのに有効である。次の問題で試してみよう。

> N を自然数とする。$N+1$ 個の箱があり，1 から $N+1$ までの番号が付いている。どの箱にも玉が 1 個入っている。番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で，番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作 (＊) を，おのおのの $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1$ に対して，k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う。
>
> (＊) k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び，その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する。（ただし，N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は，どれも同様に確からしいとする。）
>
> 操作がすべて終了した後，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ。
>
> （京大）

操作に文字が含まれていてややこしい。とりあえず $N=3$ として具体例をかきながら状況を捉えよう。$N=3$ のとき登場するのは，箱が 4 個と白玉 3 個，赤玉 1 個。図では簡単にかくために，番号 1，2，3，4 の箱に入っている玉だけを左から順に並べてかくことにする。最後の 4 回目の操作が終わったときに赤玉が番号 4 の箱に入っている状況を考えるので，とりあえず 3 回分の操作の様子をかいてみよう。なお，以下の考察に実感をもってもらうために，読むだけでなく，自分でメモ用紙などへ $N=3$ のときの状況をかいてみてほしい。



さて，次が最後の操作だ。次の操作で赤玉が番号 4 の箱に入る状況を考える。すると，図の一番左の状態はどう頑張っても赤玉が番号 4 の箱に入らないことがわかるだろう。逆に，他の場合は赤

玉の入った箱を選べばＯＫである。つまり求める確率は

最後の操作の直前に赤玉は番号 $N+1$ の箱に入っておらず，最後の操作で赤玉の入った箱が選ばれる確率

である。

この確率を求めればよい。例を見てみると，最後の操作の前に赤玉が番号 4 の箱に入っているのは一番左の状態だけだ。この状態は 1 回も赤玉が移動しなかった場合である。逆に言えば

1 回でも赤玉が移動すると赤玉は番号 4 の箱に戻ってこない　…… (#)

ようだ。なぜだろうか？と考えながら操作を振り返ってみると，例を実際にかいたならわかると思うが，1 回目の操作のとき赤玉が移動するなら移動先は番号 1 の箱，2 回目の移動先は番号 2 の箱，のように k 回目の操作のときの赤玉の移動先は番号 k の箱なので，1 回外に出た赤玉が N 回目までに番号 $N+1$ の箱に戻ることはない。これで(#)が正しいとわかったので，確率は

$$\underbrace{\frac{1}{N}}_{\text{最後に赤玉の入った箱を選ぶ}}\left\{\underbrace{1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N}_{\text{番号 } N+1 \text{ の箱が } N \text{ 回目まで 1 度も選ばれない}}\right\}$$

余事象

と求めることができる。

今回の問題では，例をかくことで

・最後の操作の直前に赤玉は番号 $N+1$ の箱に入っていてはいけない

・1 回でも赤玉が番号 $N+1$ の箱から移動すると赤玉は戻ってこない

という規則が発見できた。数学の問題を考えるときは

与えられた条件 ⟶ 論理的な道筋をたどる ⟶ こういう規則が成り立つ

という流れで考えることが多いが，例をかくことで

こういう規則が成り立つようだ ⟶ 理由を考えてみよう

という逆の流れで考えることができるため，方針選択の幅が広がるわけだ。

ただし，これらの「例」は別紙で確かめておき，答案の中には入れないのが望ましい。

合格言

●簡単な例をかいて手がかりをさぐれ

XMAPCA-Z1A3-00

n を 4 以上の自然数とする。1 から n までの n 個の自然数を横一列に並べて列をつくる。列の左から i 番目の数を a_i とするとき，a_i（$2 \leqq i \leqq n-1$）が

$$a_{i-1} < a_i > a_{i+1} \quad \text{または} \quad a_{i-1} > a_i < a_{i+1}$$

をみたすならば，a_i は「折り返しにある」というものとする。ただし，a_1 と a_n は「折り返しにある」とはいわないものとする。このとき，次の各問いに答えよ。（25 点）

(1) 折り返しにある数がちょうど 1 つであるような並べ方は何通りあるか。（10 点）

(2) 折り返しにある数がちょうど 2 つであり，その 1 つが「2」であるような並べ方は何通りあるか。（15 点）

XMAPCA-Z1C3-01

問題

n を 4 以上の自然数とする。1 から n までの n 個の自然数を横一列に並べて列をつくる。列の左から i 番目の数を a_i とするとき，a_i $(2 \leqq i \leqq n-1)$ が

$$a_{i-1} < a_i > a_{i+1} \quad \text{または} \quad a_{i-1} > a_i < a_{i+1}$$

をみたすならば，a_i は「折り返しにある」というものとする。ただし，a_1 と a_n は「折り返しにある」とはいわないものとする。このとき，次の各問いに答えよ。　(25 点)

(1)　折り返しにある数がちょうど 1 つであるような並べ方は何通りあるか。　(10 点)

(2)　折り返しにある数がちょうど 2 つであり，その 1 つが「2」であるような並べ方は何通りあるか。　(15 点)

ポイント

「折り返しにある」を理解して，立式のための規則をつかむことが目標となる問題。**いくつか具体的に列をかいて規則や場合分けのポイントをさぐる（◀1）**とよい（詳しくは「**解説 1**」にて）。

解　答

(1)　折り返しにある数がちょうど 1 つのとき，列は

$$a_1 > \cdots > 1 < \cdots < a_n$$
$$a_1 < \cdots < n > \cdots > a_n$$

のいずれかのように並ぶ。折り返しにある数が 1 の場合，1 以外の $n-1$ 個の数が「1 より左」か「1 より右」のどちらに分類されるかが決まれば並べ方は 1 通りに決まり，その分類の仕方は

$$2^{n-1} \text{通り}$$

ただし，この中には 1 が端に来て，折り返しにある数が 1 つもない場合が含まれているので，それを除くと

$$2^{n-1} - 2 \text{ 通り}$$

折り返しにある数が n の場合も同様に考えられるので，求める場合の数は

$$(2^{n-1} - 2) \times 2 = \mathbf{2^n - 4}\ \textbf{(通り)}$$ 答

(2)　2 でない方の折り返しにある数を m とすると，題意をみたす列は

$$a_1 > \cdots > 2 < \cdots < m > \cdots > 1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$1 < \cdots < m > \cdots > 2 < \cdots < a_n \quad \cdots\cdots ②$$

のいずれかのように並ぶ。ただし，m は 3 以上 n 以下の整数である。①の並べ方の数と②の並べ方の数は等しいので，以下では①の並べ方の数を m の値で場合分けして求める。

(i)　$m \neq n$ のとき

①において，$m+1$ 以上の数は 2 より左側に並ぶ。

$$n > n-1 > \cdots > m+1 > \cdots > 2 < \cdots < m > \cdots > 1$$

したがって，残りの 2 より大きく m より小さい $m-3$ 個の数が「2

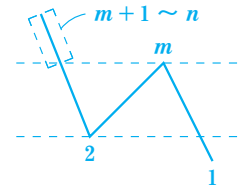
◀1
折り返しにある数は最小値か最大値なので 1 か n となる。

◀「1 より左」は減少列，「1 より右」は増加列となる。

◀　$1 < \cdots < n$
$n > \cdots > 1$
の 2 通りを除く。

◀1
1 は必ず端になる。

◀1
図をかくとわかりやすい。



より左」か「2 と m の間」か「m より右」のいずれかに分類されれば並べ方が 1 通りに決まり，その分類の仕方は

3^{m-3}通り

(ii)　$m=n$ のとき

2 より大きく n より小さい $n-3$ 個の数が「2 より左」か「2 と n の間」か「n より右」のいずれかに分類されれば並べ方が 1 通りに決まり，その分類の仕方は

3^{n-3}通り

ただし，この中には 2 が一番左に来て，折り返しにある数が「n」の 1 つだけしかない場合が含まれているので，それを除くと

$3^{n-3}-2^{n-3}$通り

(i)，(ii)より，①の並べ方は

$$\sum_{m=3}^{n-1} 3^{m-3}+(3^{n-3}-2^{n-3})=\frac{3^{n-3}-1}{3-1}+3^{n-3}-2^{n-3}$$

$$=\frac{3^{n-2}}{2}-2^{n-3}-\frac{1}{2}\text{（通り）}$$

であるから，求める場合の数はこれを 2 倍して

$$\left(\frac{3^{n-2}}{2}-2^{n-3}-\frac{1}{2}\right)\cdot 2=\mathbf{3^{n-2}-2^{n-2}-1}\ \textbf{（通り）}$$ 答

◀折り返しにある数が n のときだけ状況が異なる。

◀2 が一番左に来ると

$2<\cdots<n>\cdots>1$

となりダメなので，「2 より左」に 1 つも振り分けられない場合の数をひく。

解　説

1　補足　具体例をかいて規則をさぐる

本問は具体例をかいて規則をつかむことがポイントであった。

(1)では，たとえば $n=5$ で折り返しにある数が 1 つとなる列を

12354　15432　54312　52134

などといくつかかいてみれば「折り返しにある数は 1 か n」という規則がすぐにわかるだろう。

(2)では折り返しにある数が 2 つなので，列を長くして $n=6$ で考えてみよう。まず，折り返しにある数が 1 と 2 の列は「$\cdots>1<\cdots<2>\cdots$」または「$\cdots<2>\cdots>1<\cdots$」だが，それぞれ 2 より右と左に配置できる数がないのでダメ。折り返しにある数が 2 と 3 の列は「$\cdots>2<\cdots<3>\cdots$」または「$\cdots<3>\cdots>2<\cdots$」という列で，それぞれ残りの数 1，4，5，6 の配置が決まり

654231　132456

の 2 つしかない。しかもこれらは左右対称の列である。折り返しにある数が 2 と 4 の列だと「$\cdots>2<\cdots<4>\cdots$」または「$\cdots<4>\cdots>2<\cdots$」という列で，1，5，6 の位置が決まり「$6>5>\cdots>2<\cdots<4>\cdots>1$」または「$1<\cdots<4>\cdots>2<\cdots<5<6$」となる。あとは 3 の位置だけ考えることになるので，それぞれ 3 通りずつの

653241　652341　652431　134256　143256　142356

の 6 通りだ。ここまでかいてみれば，題意をみたす列のパターンは「$\cdots>2<\cdots<m>\cdots$」または「$\cdots<m>\cdots>2<\cdots$」の 2 パターンであり

・1 は必ず端に来る

・m より大きな数は配置が決まる

・それぞれ同じ数ずつできる（左右対称）

という 3 つの規則がわかるだろう。

XMAPCA-Z1C3-03

2 別解 (2)**その他の考え方**

「**解答**」では

(i) 2 でない方の折り返しにある数 m を決める

(ii) m より大きい数と 1 の配置を決める

(iii) 残りの $m-3$ 個の数の位置を 3 つに分類する

(iv) m を動かして和をとる

という手順で考えた。ここでは他の手順で考える別解を 2 つ紹介しよう。

1 つ目は組合せの考え方を用いて求める方法である。この方法では，数をどの位置に分類するかさえ決めてしまえば，並べ方は 1 通りに定まることを利用する。そこで「$\cdots > 2 < \cdots < a > \cdots > 1$」という列を次の手順で作成する。

(i) 1 と 2 以外の $n-2$ 個の数から 2 より左側に配置する k 個の数を選ぶ（${}_{n-2}\mathrm{C}_k$ 通り）

(ii) 残りの $n-2-k$ 個の数の中で一番大きい数を a とする

(iii) 残りの $n-2-k-1$ 個の数を a の左右に分類する（$2^{n-2-k-1}$ 通り）

(iv) k を動かして和をとる

2 の左右にはそれぞれ 1 つ以上の数が必要なので k は 1 以上 $n-3$ 以下だから，この場合の数は

$$\sum_{k=1}^{n-3} {}_{n-2}\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-2-k-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-3} {}_{n-2}\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-2-k}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n-2}({}_{n-2}\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-2-k} \cdot 1^k) - {}_{n-2}\mathrm{C}_0 \cdot 2^{n-2} - {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2} \cdot 2^0\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(2+1)^{n-2} - 2^{n-2} - 1\} \quad \text{（二項定理の利用）}$$

$$= \frac{1}{2}(3^{n-2} - 2^{n-2} - 1)$$

1 が一番左に来る列も同様なので，この値の 2 倍が答えとなるわけだ。

2 つ目は考え方は難しいが，計算が非常に簡単である。手順は次の通り。

(i) 1 と 2 以外の $n-2$ 個の数を A，B，C の 3 つのグループに分ける（3^{n-2} 通り）

(ii) それらを次のように並べる。

（A グループ）＞2＜（B グループ）（C グループ）＞1

ただし，A と C は左から大きい順，B は左から小さい順に並べる。

ポイントは 2 でない方の折り返しにある数が B と C のどちらに入るかを決めないところである。ただし，注意点がいくつかある。

・A が 0 個になってはいけない（2^{n-2} をひく）

・B と C の両方が 0 個になってはいけない（1 をひく）

・2 でない方の折り返しにある数が B に入る場合と C に入る場合で同じ列が 2 個ずつできる（たとえば「624531」という列は「6，4，53」と「6，45，3」の 2 個）

これらに注意すると場合の数は

$$(3^{n-2} - 2^{n-2} - 1) \times \frac{1}{2}$$

1 が一番左に来る列も同様なので，この値の 2 倍が答えとなる。

XMAPCA-Z1C3-04

極　意

・簡単な例をかいて手がかりをさぐれ

簡単な例をかくことで，規則や場合分けの条件などの手がかりを発見しやすくなる。本問のように問題文に n などの文字が含まれているときは，具体的な数字を入れて簡単な例を考えてみるとよい。また，n などの文字がないときも自分で簡単な例を作って考えるのが有効となる場合がある。

（例）座標平面上の 6 個の点 (1，0)，(2，0)，(3，0)，(0，1)，(0，2)，(0，3) を 2 つずつ 3 つの組に分けて，それぞれの組における 2 点の距離の和を考える。このような和の最大値は $\boxed{}$ である。

（早大）

（考え方）まずは図(I)のように，6 個の点でなく 4 個の点で考えると，2 つずつの点の組は

AB と CD，AD と BC，AC と BD

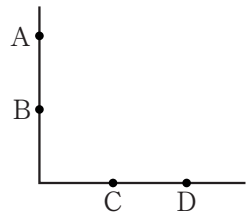
の 3 通りできる。このとき，下の図(II)のように AC と BD の交点を P とすれば

$$AB + CD < (AP + BP) + (CP + DP) = AC + BD$$
$$AD + BC < (AP + DP) + (BP + CP) = AC + BD$$

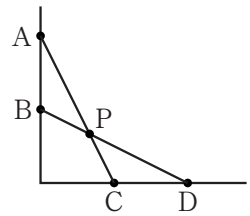
が成り立つので，結んだ線分が交わるように AC，BD と組み合わせるときの和が一番大きくなる。

同じように考えると，6 個の点のときも結んだ線分が交わるように結ぶのがよく，3 つの線分がいずれも残りの 2 つの線分と交わっているような点の組み合わせ方は下の図(III)のパターンしかないので，これが最大となると予想できる（実際にこれが最大である）。

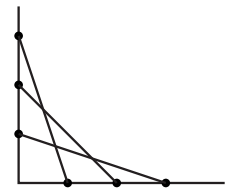
(I)



(II)



(III)



見通しの立て方

XMAPCA-Z1D1

総得点 ／50

1 XMAPCA-Z1C1

(1) 1 6／8

(2) 2 11／17

②▶ n を4以上の自然数とする。1から n までの n 個の自然数を横1列に並べて列をつくる。列の左から i 番目の数を a_i とするとき，a_i $(2 \leqq i \leqq n-1)$ が ◀②
（以下略）

(1) $a_1, a_2 \cdots, a_i, \cdots, a_n$

ある1つの数に対して ① $a_{i-1} < a_i > a_{i+1}$ ならば

a_i は全ての a_l より大きい

同様に ② $a_{i-1} > a_i < a_{i+1}$ ならば

a_i は全ての a_l より小さい

○○○ > 1 < ○○○○

⇓

並べ方は一意に決まるので残りの $(n-1)$ 個の自然数が

+6 左右のどちらかに入れればよいので 2^{n-1} ← この中には $\begin{cases} 1 < \cdots\cdots < n \\ n > \cdots\cdots > 1 \end{cases}$ の場合も含んでいます。

①も同じなので $2^{n-1} \times 2 = \underline{2^n}$

①▶ $(2^{n-1} - 2) \times 2$ としなければいけません。◀①

(2) 折り返しにある「2」以外の数は1ではないから

+3 その数を m とすると $m \geqq 3$

○○○ > 2 < ○○ < m > ○○○ ← ここでは $m \neq n$ で考えます。

あ い う

$m = n$ のときは

$2 < \cdots < n > \cdots > 1$

となる折り返しが1つのときも含まれるので分けて考えます。

いに入れる数は2以上 m 未満の $(m-3)$ 個

うは m より小さい数しか入れないので

m 未満の数が入る場所が決まれば並べ方が一意に決まる

+8 よって $\underline{3^{m-3}}$

「2」が端にくる場合をのぞけばよいので

$3^{n-3} - 2^{n-3}$ (通り)

$3 \leqq m \leqq n-1$ のそれぞれの m に 3^{m-3} 通りあるので、全部では

$\sum_{m=3}^{n-1} 3^{m-3}$ (通り)

（m は変数です。答は n で表わされる式にしなければいけません。）

〈必修テーマの確認〉

本問のテーマは「列の規則を把握し、立式する」でした。規則は正しく把握できているので、立式までもう一歩です。モレや重複がないよう例外に注意して立式しましょう。

数学