

前の設問の利用を考えてみる

今回の題材は次の(2)だ。

整数 p, q ($p \geq q \geq 0$) に対して 2 項係数を ${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき,

$${}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_n C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$$

を計算し, n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき, 和 $\frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \frac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ。

(千葉大)

(1)は与えられた二項係数の定義を利用して計算すれば

$${}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_n C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right) = \frac{k}{k+1} \cdots \cdots (b)$$

となることが示せる。困るのは(2)だ。二項係数の逆数の和には計算公式がない。定義を代入しても、シグマを用いて表してもうまくいかない。ここで注目してほしいのが前の設問(1)である。(1)は二項係数に関する等式(b)を示した。(2)にも同じ二項係数が出てくるわけで、「何とか(2)に利用できないだろうか?」と考えてみよう。すると、(2)では「和を求める」ということと $\left(\frac{1}{{}_n C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$ の部分が「1つずれた値をもつ分数の差」となっていることから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

が頭をよぎるはず。そこで、今回も同じやり方で解くことができないか考えてみよう。このことを踏まえて、上の式と同じような形を作るために(b)を変形してじゃまな部分を右辺にもっていくと

$$\frac{1}{{}_n C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{{}_{n+k+1}C_{k+1}}$$

と二項係数の逆数が登場する。そこで、右辺の分母の二項係数が ${}_nC_3$ の形となるように $k=2$ を代入すると

$$\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{{}_{n+3}C_3}$$

両辺の $n=0$ から $n=m-3$ までの和をとれば

$$\sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \frac{1}{{}_mC_3} \right)$$

これより与えられた和は次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \cdots + \frac{1}{{}_mC_3} &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}C_2} - \frac{1}{{}_{n+3}C_2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{{}_2C_2} - \frac{1}{{}_3C_2} \right) + \left(\frac{1}{{}_3C_2} - \frac{1}{{}_4C_2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{{}_{m-1}C_2} - \frac{1}{{}_mC_2} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} \end{aligned}$$

次の各問いに答えよ。

(25 点)

- (1) 自然数 n に対して, $\tan \frac{\theta_n}{2} = \frac{n}{n+1}$ とおくとき, $\sin \theta_n$, $\cos \theta_n$ をそれぞれ n で表せ。

(5 点)

- (2) 次の条件をみたすような互いに相似でない二等辺三角形が無数に存在することを示せ。

(条件) 3 辺の長さ, 面積, 外接円の半径がすべて整数

(20 点)

問題

次の各問いに答えよ。

(25 点)

- (1) 自然数 n に対して、 $\tan \frac{\theta_n}{2} = \frac{n}{n+1}$ とおくとき、 $\sin \theta_n$, $\cos \theta_n$ をそれぞれ n で表せ。

(5 点)

- (2) 次の条件をみたすような互いに相似でない二等辺三角形が無数に存在することを示せ。

(条件) 3 辺の長さ, 面積, 外接円の半径がすべて整数

(20 点)

ポイント

(2)の方針を立てることが本問で一番難しいところ。具体的に無数に存在する三角形を作ればよいが、手がかりなしでは難しい。そこで(1)に着目したい。(2)に利用できないかという視点で(1)をみて(◀1), (1)では「無数の角 θ_n ($n = 1, 2, \dots$) について $\sin \theta_n$ と $\cos \theta_n$ が有理数になることを示した」という見方ができればOK (詳しくは「解説」にて)。

解答

$$(1) \cos^2 \frac{\theta_n}{2} + \sin^2 \frac{\theta_n}{2} = 1 \text{ より}$$

$$\sin \theta_n = 2 \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} = \frac{2 \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_n}{2} + \sin^2 \frac{\theta_n}{2}}$$

$$= \frac{2 \tan \frac{\theta_n}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_n}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{n}{n+1}}{1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2}$$

$$= \frac{2n(n+1)}{(n+1)^2 + n^2}$$

$$= \frac{2n(n+1)}{2n^2 + 2n + 1}$$

答

$$\cos \theta_n = \cos^2 \frac{\theta_n}{2} - \sin^2 \frac{\theta_n}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\theta_n}{2} - \sin^2 \frac{\theta_n}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_n}{2} + \sin^2 \frac{\theta_n}{2}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_n}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_n}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2 + n^2}$$

$$= \frac{2n+1}{2n^2 + 2n + 1}$$

答

◀ $\tan \theta_n$ を n で表す, $\sin \frac{\theta_n}{2}$ を n で表す, など方針はさまざま。「解答」では, $\sin \theta_n$ を $\tan \frac{\theta_n}{2}$ で表した。

(2) (1)の θ_n は

$$\sin \theta_n > 0, \cos \theta_n > 0$$

をみたし, さらに

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta_{n+1}}{2} - \tan \frac{\theta_n}{2} &= \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

が成り立つので, θ_n は

$$0^\circ < \theta_n < \theta_{n+1} < 90^\circ \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

をみたす。そこで, この θ_n に対して, $\angle B_n = \angle C_n = \theta_n$, $A_n B_n = A_n C_n = x_n$ となる二等辺三角形 $A_n B_n C_n$ を考える。

このとき, ①より

$$\triangle A_1 B_1 C_1, \triangle A_2 B_2 C_2, \cdots, \triangle A_n B_n C_n, \cdots$$

はどの2つを選んでも相似でない。すると

$$\frac{1}{2} B_n C_n = A_n B_n \cos \angle B_n = x_n \cos \theta_n$$

より

$$B_n C_n = \frac{2(2n+1)}{2n^2+2n+1} x_n$$

となる。さらに, $\triangle A_n B_n C_n$ の面積を S_n , 外接円の半径を R_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} A_n B_n \cdot B_n C_n \sin \angle B_n \\ &= \frac{1}{2} x_n \cdot \frac{2(2n+1)}{2n^2+2n+1} x_n \cdot \frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1} \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{(2n^2+2n+1)^2} x_n^2 \\ R_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{A_n C_n}{\sin \angle B_n} \\ &= \frac{1}{2} x_n \cdot \frac{2n^2+2n+1}{2n(n+1)} \\ &= \frac{2n^2+2n+1}{4n(n+1)} x_n \end{aligned}$$

以上より

$$x_n = 4n(n+1)(2n^2+2n+1)$$

とすれば, $\triangle A_n B_n C_n$ は3辺の長さ, 面積, 外接円の半径がすべて整数の二等辺三角形となる。

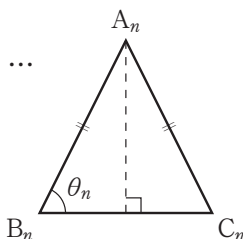
よって, 題意をみたす二等辺三角形が無数に存在することが示された。 (証明終)

◀ θ_n は $0^\circ < \theta_n < 90^\circ$ の範囲で単調増加するので, 任意の異なる2つの自然数 l, m に対して $\theta_l \neq \theta_m$ が成り立つ。

◀ 1
(1)の θ_n を利用して無数の三角形を設定する。三角形の設定の仕方は「解説」で紹介する。

◀ θ_n の大きさがすべて異なるので相似ではない。

◀ 正弦定理より
$$2R_n = \frac{A_n C_n}{\sin \angle B_n}$$



解 説

補足 (2) 三角形の作り方

「解答」では(1)の θ_n を利用して

$\angle B_n = \angle C_n = \theta_n$, $A_n B_n = A_n C_n = x_n$ となる二等辺三角形 $A_n B_n C_n$

を考えた。では、この三角形はどこから出てきたのだろうか？ (2)では条件をみたす三角形が無数に存在することを示さなければならない。そこで、(1)をよくよく考えてみると、(1)の結果は

無数の角 θ_n ($n = 1, 2, \dots$) について $\sin \theta_n$ と $\cos \theta_n$ が有理数となる

ことを示している。となれば、この角 θ_n を使うことを考えたい。さて、 $A_n B_n = A_n C_n$ の二等辺三角形 $A_n B_n C_n$ に θ_n を利用するには、2つの方針がある。すなわち、「 $\angle A_n = \theta_n$ とする」と「 $\angle B_n = \angle C_n = \theta_n$ とする」だ。仮に $\angle A_n = \theta_n$ として $B_n C_n$ を表そうとすると、余弦定理より

$$\begin{aligned} B_n C_n^2 &= A_n B_n^2 + A_n C_n^2 - 2A_n B_n \cdot A_n C_n \cos \angle A_n \\ &= x_n^2 + x_n^2 - 2x_n^2 \cos \theta_n \\ &= 2x_n^2(1 - \cos \theta_n) \\ &= \frac{4n^2}{2n^2 + 2n + 1} x_n^2 \end{aligned}$$

$$\therefore B_n C_n = \frac{2n}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}} x_n$$

となり根号が出てきて整数から遠くなってしまう。一方、「 $\angle B_n = \angle C_n = \theta_n$ 」とすると、「解答」のように $B_n C_n$ は有理数になるので、こちらの方針がよいわけだ。「解答」には表れていない、このような思考の流れも今回の問題で習得してほしい。

 極 意

・ 方針が見えないときは前の設問とのつながりを考えよ

本問は一見関係ないように見えて、実は前の設問が誘導となっていた。このように「前の設問が利用できないか？」と多少強引に考えてみることで方針が立つことがある。

見通しの立て方

XMAPCA-Z1D1

総得点 50

1 XMAPCA-Z1C1

次の各問いに答えよ。

(25 点)

(1) 自然数 n に対して、 $\tan \frac{\theta_n}{2} = \frac{n}{n+1}$ とおくと、 $\sin \theta_n$, $\cos \theta_n$ をそれぞれ n で表せ。

(以下略)

②



$$(1) \cos \theta_n = 2 \cos^2 \frac{\theta_n}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta_n}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} - 1 = \frac{2n+1}{2n^2+2n+1}$$

$$\tan \theta_n = \frac{2 \tan \frac{\theta_n}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta_n}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{n}{n+1}}{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

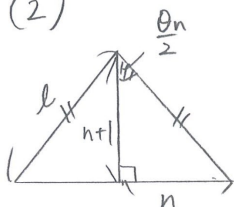
$$\sin \theta_n = \cos \theta_n \tan \theta_n = \frac{2n+1}{2n^2+2n+1} \cdot \frac{2n(n+1)}{2n+1} = \frac{2n(n+1)}{2n^2+2n+1}$$

解答では、 $\sin \theta_n$ を $\tan \frac{\theta_n}{2}$ で表す方針で解いているので、そちらも確認しておきましょう。

数
学

①

(2)



二等辺三角形の頂角を θ_n とし、底辺を $2n$ 、高さを $n+1$ とする。

$$(\text{外接円の半径}) = \frac{2n}{2 \sin \theta_n} = \frac{2n^2+2n+1}{2(n+1)}$$

$$(\text{面積}) = \frac{1}{2} \times 2n \times (n+1) = n(n+1)$$

$$l = \sqrt{n^2 + (n+1)^2} = \sqrt{2n^2 + 2n + 1}$$

<必修テーマの確認>

(1) を利用する方針には気づけていますので、もう一歩です。うまく利用できるように、試行錯誤してみましょう。



θ_n を利用するという方針はよいのですが、頂角を θ_n とすると、辺の長さが無理数になってしまいます。そこで、底角を θ_n としてみましょう。