前の設問の利用を考えてみる

今回の題材は次の(2)だ。

整数 p, q ($p \geqq q \geqq 0$) に対して2項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお $0! = 1$ とする。

(1) n, k が0以上の整数のとき，

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) $$

を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が3以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

（千葉大）

(1)は与えられた二項係数の定義を利用して計算すれば

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) = \frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\flat) $$

となることが示せる。困るのは(2)だ。二項係数の逆数の和には計算公式がない。定義を代入しても，シグマを用いて表してもうまくいかない。ここで注目してほしいのが前の設問(1)である。(1)は二項係数に関する等式(♭)を示した。(2)にも同じ二項係数が出てくるわけで，「何とか(2)に利用できないだろうか？」と考えてみよう。すると，(2)では「和を求める」ということと $\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ の部分が「1つずれた値をもつ分数の差」となっていることから

$$ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) $$
$$ = 1 - \frac{1}{n+1} $$

が頭をよぎるはず。そこで，今回も同じやり方で解くことができないか考えてみよう。このことを踏まえて，上の式と同じような形を作るために(♭)を変形してじゃまな部分を右辺にもっていくと

$$ \frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}} $$

と二項係数の逆数が登場する。そこで，右辺の分母の二項係数が ${}_{\bigcirc}\mathrm{C}_3$ の形となるように $k=2$ を代入すると

$$ \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} $$

両辺の $n=0$ から $n=m-3$ までの和をとれば

$$ \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} \right) $$

これより与えられた和は次のように求めることができる。

$$ \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{m-3} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) $$
$$ = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} \right) + \left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2} \right) \right\} $$
$$ = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} $$

XMAPCA-Z1A2-00

n を正の奇数とする。 (25 点)

(1) a, b を正の整数とするとき，a^n+b^n は $a+b$ で割り切れることを示せ。 (5 点)

(2) m を正の整数とするとき，$2(1^n+2^n+\cdots+m^n)$ は $m+1$ で割り切れることを示せ。 (20 点)

XMAPCA-Z1C2-01

問題

n を正の奇数とする。（25 点）

(1) a, b を正の整数とするとき，$a^n + b^n$ は $a+b$ で割り切れることを示せ。（5 点）

(2) m を正の整数とするとき，$2(1^n + 2^n + \cdots + m^n)$ は $m+1$ で割り切れることを示せ。（20 点）

ポイント

(2)の方針を立てることが本問で一番難しいところ。(1)と同様に n 乗があり，割り切れることを示すのだから**(1)の利用の仕方を考える（◀1）**のがカギとなる。a と b に何をあてはめるとうまくいくかを試行錯誤して考えよう。

解　答

(1) n が 3 以上の正の奇数のとき

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= (a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \cdots - a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) \\
&\qquad + (a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 - \cdots - ab^{n-1} + b^n) \\
&= a^n + (-a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \cdots - a^2b^{n-2} + ab^{n-1}) \\
&\qquad + (a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 - \cdots - ab^{n-1}) + b^n \\
&= a^n + b^n
\end{aligned}
$$

が成り立つ。$a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}$ は整数なので，$a^n + b^n$ は $a+b$ で割り切れる。$n=1$ のときも割り切れるので題意は示された。（証明終）

◀因数分解を利用する方針。「**解説 1**」参照。

(2) $2(1^n + 2^n + \cdots + m^n)$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
&2(1^n + 2^n + \cdots + m^n) \\
&= (1^n + 2^n + \cdots + m^n) + (m^n + \cdots + 2^n + 1^n) \\
&= (1^n + m^n) + \{2^n + (m-1)^n\} + \cdots + (m^n + 1^n) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \{k^n + (m+1-k)^n\}
\end{aligned}
$$

ここで，(1)より $k^n + (m+1-k)^n$ は

$$k + (m+1-k) = m+1$$

で割り切れるので，$2(1^n + 2^n + \cdots + m^n)$ は $m+1$ で割り切れる。

（証明終）

◀1
(1)を利用するために和が $m+1$ となる 2 つずつのペアをつくる。2 倍をばらすのがポイントで，次のように

$$
\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ m & m-1 & \cdots & 1 \end{matrix}
$$

と並べるとわかりやすいだろう。

解　説

1 補足 因数分解

(1)の「**解答**」では，n が 3 以上の奇数のときに

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

ことを利用した。同様に n が正の偶数のときは

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

が成り立つ。また，n が偶数でも奇数でも成り立つ式として，n が 2 以上の整数のとき

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

もある。これらは覚えておくとよい。

2 別解 (1)**を数学的帰納法で証明する**

$a^{2i-1} + b^{2i-1}$（$i = 1,\ 2,\ \cdots$）が $a+b$ で割り切れることを数学的帰納法で証明しよう。

(i)　$i=1$ のときは $a+b$ となるので成り立つ。

(ii)　$i=k$ のとき成り立つと仮定する，すなわち

$$a^{2k-1} + b^{2k-1} = (a+b)c_k \quad (c_k \text{ は整数})$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1} &= a^{2k+1} + b^{2k+1} \\ &= (a+b)(a^{2k} + b^{2k}) - ab(a^{2k-1} + b^{2k-1}) \\ &= (a+b)(a^{2k} + b^{2k}) - ab(a+b)c_k \\ &= (a+b)(a^{2k} + b^{2k} - abc_k) \end{aligned}$$

$a^{2k} + b^{2k} - abc_k$ は整数なので，$i = k+1$ のときも成り立つ。

(i)，(ii)より題意は示された。

極　意

・方針が見えないときは前の設問とのつながりを考えよ

方針が見えないときは前の設問の考え方や結果の利用を考えてみよう。とくに本問のように，設定に似ているところがあるときは利用できることが多い。

見通しの立て方

XMAPCA-Z1D1

総得点 /50

(1) 1
2/8

(2) 2
7/17

②▶ ◀②

1 XMAPCA-Z1C1

n を正の奇数とする。 (25点)

(1) a, b を正の整数とするとき，a^n+b^n は $a+b$ でわり切れることを示せ。 (8点)

(2) m を正の整数とするとき，$2(1^n+2^n+\cdots+m^n)$ は $m+1$ でわり切れることを示せ。 (17点)

(1) $a^{2m-1}+b^{2m-1}$ が $a+b$ で割り切れることを示す。

(i) $m=1$ のとき成り立つ

(ii) $m=k$ のとき成り立つと仮定する。

$a^{2m+1}+b^{2m+1}$

$=(a^2+b^2)(a^{2m-1}+b^{2m-1})-a^2b^2(a^{2m-3}+b^{2m-3})$

$2m-1$ と $2m-3$ は奇数なので $a^{2m-1}+b^{2m-1}$ と $a^{2m-3}+b^{2m-3}$ は

どちらも $a+b$ で割り切れる。

よって成り立つ。

+2

これは $m=k-1$ のときなので
仮定に含まれていません。
(i)で $m=1$ と $m=2$ の2つを示し，
(ii)で $m=k-1$ と $m=k$ の2つを
仮定する必要があります。

(2) (1)より

①▶ ◀①

$1^n+m^n=(1+m)p$

$2^n+(m-1)^n=(2+m-1)q=(1+m)q$

$3^n+(m-2)^n=(3+m-2)r=(1+m)r$

$\vdots$

$\left(\frac{m}{2}\right)^n+\left(\frac{m}{2}+1\right)^n=\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}+1\right)s=(1+m)s$

よってすべて $m+1$ で割り切れるので成り立つ。

+7

m が偶数のときはこれでOKですが，奇数のときは $\frac{m}{2}$ が整数にならないのでダメです。

2倍に注目して

1	2	………	m
m	m−1	………	1

と組み合わせましょう。

＜必修テーマの確認＞

(1)を利用する方針はOKです。文字が含まれているときはさまざまな状況を検討しましょう。

数学