

次の問題は難しいが、遷移図をかくことを意識するとかなり見通しがよくなる。

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

三角形が1つと球がたくさん用意されている。三角形の各頂点上には高々2個の球を置くことができるとし、三角形上の頂点以外の位置には球を置くことができないとする。三角形上に少なくとも1個の球が置かれている状態に対して次の操作Tを考える。

操作 T

(T1) 三角形上の球どれか1個を等しい確率で選ぶ。

(T2) (a) 確率 $\frac{1}{2}$ で、(T1)により選ばれた球が置かれている頂点上に三角形外から球を1個加える。

(b) 確率 $\frac{1}{4}$ ずつで、(T1)により選ばれた球を隣の2つの頂点のどちらかに移す。

(T3) (T2)の結果、1つの頂点上に3個の球が置かれた場合は、その3個目の球を直前にあった位置に戻す。

また、次の4つの状態を考える。

A : 2つの頂点上に2個ずつ球が置かれ、1つの頂点上には何も置かれていない状態

B : 1つの頂点上に2個の球が置かれ、2つの頂点上に1個ずつ球が置かれている状態

C : 三角形上に合計5個の球が置かれている状態

D : 三角形上に合計6個の球が置かれている状態

いま、状態Aから始め、操作Tを何回か繰り返し行う。以下、各回の操作を(T3)まで終えたときの状態のみに着目し、操作途中の状態を考えないものとする。また、 n を自然数とする。

- (1) 操作Tを n 回繰り返し終えたとき、状態がAである確率を a_n 、状態がBである確率を b_n とする。 $a_1 = \boxed{\text{(あ)}}$ 、 $b_1 = \boxed{\text{(い)}}$ である。さらに、 $n \geq 2$ に対して a_n 、 b_n を a_{n-1} 、 b_{n-1} で表すと

$$\begin{cases} a_n = \boxed{\text{(う)}} a_{n-1} + \boxed{\text{(え)}} b_{n-1} \\ b_n = \boxed{\text{(お)}} a_{n-1} + \boxed{\text{(か)}} b_{n-1} \end{cases}$$

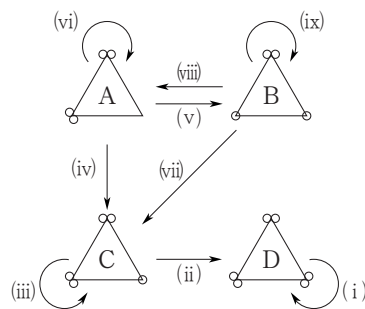
である。

(慶大・一部省略)

本問は状況が移り変わる様子を題材としているので、遷移図をかくとよい。遷移図とは状況の移り変わり方を示した図である。本問では4つの状態A、B、C、Dが変化し、互いに移り変わる。球の数は1つ増えるか変わらないかのどちらかなので、遷移図は右のようになる。この図の(i)～(ix)の矢印の確率を求めることが目標となるわけだ((1)で必要なのはA、Bに関する矢印だけだが、せっくなのですべて求めよう)。

- (i) Dからは矢印が1つしか出ていないので確率は1である。

- (ii) CからDになるのは、(T1)で1つだけの球が選ばれ(T2)で(a)となる場合なので $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ となる。



- (iii) (ii)でない確率なので $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ である。
- (iv) A から C になるには (T2) で(a)となる必要があるが, (T1) でどの球を選んでも (T3) で必ずもとに戻ってしまうので確率は 0 となる。
- (v) A から B になるのは, (T2) で(b)となり何も置かれていない頂点へ移す場合なので $\frac{1}{4}$ である。
- (vi) (iv)でも(v)でもない確率なので $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。
- (vii) B から C になるのは, (T1) で 1 つだけ置かれている球が選ばれ (T2) で(a)となる場合なので $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。
- (viii) B から A になるのは, (T1) で 1 つだけ置かれている球が選ばれ (T2) で(b)となって 1 つの球の方へ移す場合なので $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ である。
- (ix) (vii)でも(viii)でもない確率なので $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ である。

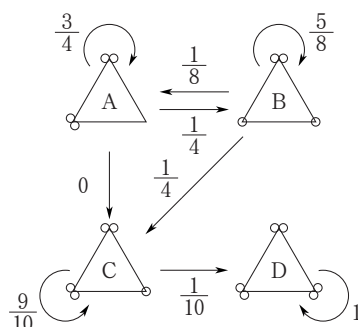
以上(i)~(ix)を遷移図に反映させると右の図のようになるので

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

$$b_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + \frac{1}{8}b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{4}a_{n-1} + \frac{5}{8}b_{n-1}$$



いかがだろうか。いきなり立式することを目標とするのではなく、間に「遷移図を完成させる」という目標をはさむことで、見通しよく考えていくことができただろう。

今回の例のように、ややこしい設定の問題では状況を図にしてみるとよい。今回例にあげた表や遷移図だけでなく、場合分けが多いときは樹形図、集合が絡むときはベン図など、状況に応じて適切な図をかくことが重要である。

合格言

●状況を図や表に表して整理せよ

$\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$ の 6 枚のカードがあり, これを 3 人で 2 枚ずつ持っている。
最初, 3 人の持っているカードが $\boxed{A \ A}$ と $\boxed{A \ C}$ と $\boxed{B \ B}$ であるとし, 次の操作でカードを交換する。

(操作) 3 人から無作為に 2 人を選び, 2 人が持っているカードからそれぞれ
無作為に 1 枚を選んで, 互いにそのカードを交換する

この操作を n 回 ($n = 1, 2, \dots$) 行ったのち, 3 人の持っているカードがそれぞれ, $\boxed{A \ A}$ と $\boxed{A \ C}$ と $\boxed{B \ B}$ となる確率を p_n , $\boxed{A \ B}$ と $\boxed{A \ B}$ と $\boxed{A \ C}$ となる確率を q_n , $\boxed{A \ A}$ と $\boxed{A \ B}$ と $\boxed{B \ C}$ となる確率を r_n とするとき, 次の各問いに答えよ。 (25 点)

- (1) p_{n+1} , q_{n+1} , r_{n+1} をそれぞれ p_n , q_n , r_n を用いて表せ。 (20 点)
- (2) p_n を求めよ。 (5 点)

問題

$\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$ の 6 枚のカードがあり, これを 3 人で 2 枚ずつ持っている。最初, 3 人の持っているカードが $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$ と $\boxed{B}\boxed{B}$ であるとし, 次の操作でカードを交換する。

(操作) 3 人から無作為に 2 人を選び, 2 人が持っているカードからそれぞれ無作為に 1 枚を選んで, 互いにそのカードを交換する

この操作を n 回 ($n = 1, 2, \dots$) 行ったのち, 3 人の持っているカードがそれぞれ, $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$ と $\boxed{B}\boxed{B}$ となる確率を p_n , $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$ となる確率を q_n , $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{B}\boxed{C}$ となる確率を r_n とするとき, 次の各問いに答えよ。 (25 点)

- (1) p_{n+1} , q_{n+1} , r_{n+1} をそれぞれ p_n , q_n , r_n を用いて表せ。 (20 点)
- (2) p_n を求めよ。 (5 点)

ポイント

操作にはいろいろな状況がありややこしい。本問はカードの移り変わりを題材としているので遷移図をかく (◀1)と状況がつかみやすい。3 つの状態から相互に矢印をかくて, その矢印のように状態が移る確率を求めることを目標にしよう。

解答

- (1) 3 人のカードの持ち方は, $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$ と $\boxed{B}\boxed{B}$, $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$, $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{B}\boxed{C}$ の 3 通りしかない。したがって, 操作によるカードの持ち方の移り変わりを遷移図にすると次の図ようになるので, 以下でそれぞれの矢印のように状態が移る確率を求める。

- (i) $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{B}\boxed{B}$ の 2 人が選ばれる確率なので

$$\frac{1}{3}$$

- (ii) $\boxed{A}\boxed{C}$ と $\boxed{B}\boxed{B}$ の 2 人が選ばれる確率なので

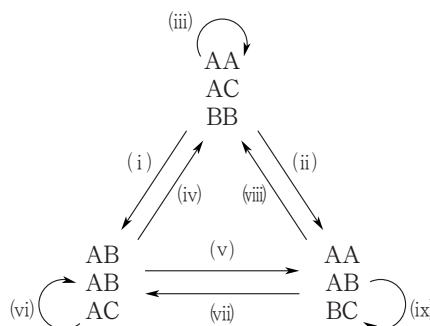
$$\frac{1}{3}$$

- (iii) (i), (ii) とならない確率なので

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- (iv) $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ の 2 人が選ばれて, $\boxed{A}$ と $\boxed{B}$ のカードを交換する確率なので

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$



◀1

遷移図の矢印のところに確率を書き込むことを目標にする。

◀ $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ の 2 人

が選ばれる確率は $\frac{1}{3}$ である。カードの交換の仕方は $\boxed{A}$ と $\boxed{A}$, $\boxed{A}$ と $\boxed{B}$, $\boxed{B}$ と $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ と $\boxed{B}$ の 4 通りより, $\boxed{A}$ と $\boxed{B}$ を交換する確率は $\frac{2}{4}$ 。

(v) $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$ の2人が選ばれて、 $\boxed{B}$ と $\boxed{A}$ または $\boxed{A}$ と $\boxed{C}$ のカードを交換する確率なので

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$$

(vi) (iv), (v)とまらない確率なので

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

(vii) $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{B}\boxed{C}$ の2人が選ばれる確率なので

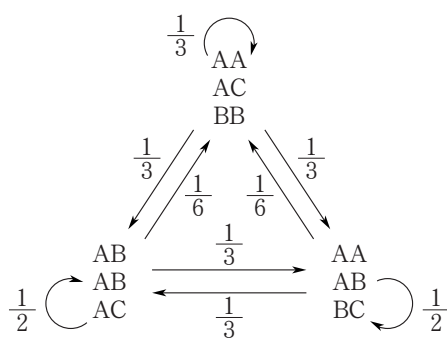
$$\frac{1}{3}$$

(viii) $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{B}\boxed{C}$ の2人が選ばれて、 $\boxed{A}$ と $\boxed{B}$ または $\boxed{B}$ と $\boxed{C}$ のカードを交換する確率なので

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

(ix) (vii), (viii)とまらない確率なので

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



したがって、状態の遷移は右上の図ようになるので、答えは

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{6} r_n$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{3} r_n$$

答

$$r_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} q_n + \frac{1}{2} r_n$$

(2) 3人のカードの持ち方は、 $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$ と $\boxed{B}\boxed{B}$, $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$, $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{B}$ と $\boxed{B}\boxed{C}$ の3通りしかないので

$$p_n + q_n + r_n = 1 \quad \therefore q_n + r_n = 1 - p_n$$

が成り立つ。これを利用すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} (q_n + r_n) = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} (1 - p_n)$$

$$= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6}$$

となり、この式は

$$p_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \left(p_n - \frac{1}{5} \right)$$

と変形できる。したがって、 $p_1 = \frac{1}{3}$ を踏まえると

$$p_n - \frac{1}{5} = \left(p_1 - \frac{1}{5} \right) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} = \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

答

◀すべての状態の確率の和が1であることを利用する。

◀ p_1 は1回目の操作のあとに $\boxed{A}\boxed{A}$ と $\boxed{A}\boxed{C}$ と $\boxed{B}\boxed{B}$ となる確率。

◀ $\frac{2}{15} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6}$ より
 $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1}$ と変形してもよい。

解 説

補足 q_n と r_n を求めよう

q_n と r_n を求めてみよう。 p_n と同じように、 $p_n + q_n + r_n = 1$ を利用して漸化式を導いて求めることもできるが、「解答」の遷移図が確率の値も含めて左右対称になっている、さらに $q_1 = r_1$ であることから

$$q_n = r_n$$

であることに気づくと $p_n + q_n + r_n = 1$ より

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - p_n) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\} = \frac{2}{5} - \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

と簡単に求めることができる。もちろん r_n も同じ値である。



極 意

・状況を図に表して整理せよ

設定がややこしく簡単に状況が把握できないときは図をかくのが有効である。本問のように状態が移り変わる様子を題材とした問題では遷移図をかくとよい。他にも、さいころを2つ投げるときは 6×6 の表をかくとわかりやすいし、場合分けが多いときは樹形図をかくとよい。状況に応じた図をかくことが重要だ。次の入試問題はベン図が有効な例である。

(例) 2 と 3 と 5 のうちの少なくともひとつで割り切れる自然数 35 個からなる集合について考える。この集合には 2 の倍数は 20 個、3 の倍数は 13 個、5 の倍数は 11 個ある。30 の倍数はなく、15 の倍数は 2 個ある。6 の倍数の個数は、10 と 15 のうちの少なくとも一方で割り切れる要素の個数の $\frac{1}{2}$ である。このとき 6 の倍数は 個あり、10 の倍数は 個ある。 (慶大)

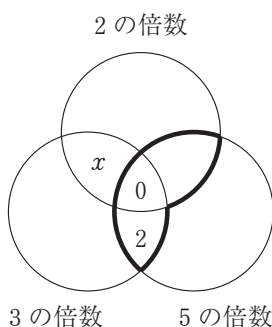
(解答) 6 の倍数の個数を x とする。30 の倍数はなく、15 の倍数は 2 個あるという条件より状況は下の図(i)のようになる。10 と 15 のうちの少なくとも一方で割り切れる要素とは下の図(ii)の太線で囲まれた部分だから、条件より 10 の倍数の個数は $2x - 2$ 個。したがって下の図(iii)と、2 の倍数は 20 個、3 の倍数は 13 個、5 の倍数は 11 個より、下の図(iii)となる。よって、2 と 3 と 5 のうちの少なくとも1つで割り切れる自然数は 35 個より

$$(22 - 3x) + (11 - x) + (11 - 2x) + x + 2 + (2x - 2) = 35$$

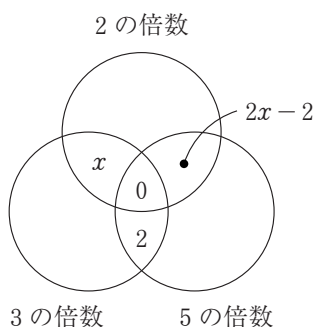
$$\therefore x = 3$$

よって、6 の倍数は 3 個、10 の倍数は 4 個である。 (答)

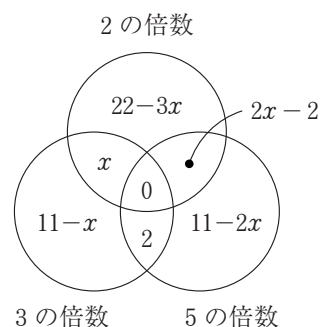
(i)



(ii)



(iii)



(1) 3
14
20

2

XMAPCA-Z1C2

(2) 4
0
5

[A], [A], [A], [B], [B], [C] の6枚のカードがあり、これを3人で2枚ずつ持っている。最初、3人の持っているカードが [A][A] と [A][C] と [B][B] であるとし、次の操作でカードを交換する。
(以下略)

(1) $P_n: AA, AC, BB \quad \frac{1}{3}$
 $Q_n: AB, AB, AC \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$
 $R_n: AA, AB, BC \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$
 $\therefore P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{6}Q_n + \frac{1}{6}R_n \dots ①$

(2) $P_n: AA, AC, BB \quad \frac{1}{3}$
 $Q_n: AB, AB, AC \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $R_n: AA, AB, BC \quad \frac{1}{3}$
 $\therefore Q_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{3}R_n \dots ②$

(3) $P_n: AA, AC, BB \quad \frac{1}{3}$
 $Q_n: AB, AB, AC \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
 $R_n: AA, AB, BC \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$
 $\therefore R_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}Q_n + \frac{1}{6}R_n \dots ③$

↑ この2人を選んでカードを交換しても R_{n+1} になります。

(2) ①-③ $P_{n+1} - R_{n+1} = -\frac{1}{6}Q_n$

これを①に代入して、 $P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n - P_{n+1} + R_{n+1} + \frac{1}{6}R_n$

$2P_{n+1} - R_{n+1} = \frac{1}{6}(2P_n - R_n)$ 符号ミス

$\therefore 2P_n - R_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$P_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}R_n \leftarrow R_n \text{ が残っては いけません。}$

(1)での操作でもわかるように3人のカードの持ち方は

問題で示された3通りしかない。 即ち、 $P_n + Q_n + R_n = 1$

これを利用して「Pだけの漸化式が作れないか」と考えるとよいでしょう。

③を正しい式に直して考えましょう。

<必参テーマの確認>

本問のテーマは「状況を正しく把握し、立式する」でした。図をかいて把握する方針はよいです。今回はモレが生じてしまいましたが、今後とも図をかくことは心がけていきましょう。