第4問

解　説

図1の放物線を C_1 とする。

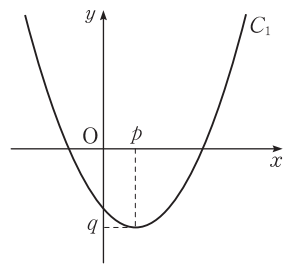
(1)　C_1 は下に凸の放物線であるから

$$\boldsymbol{a > 0} \qquad \Rightarrow ①$$

C_1 の頂点 $(p,\ q)$ は第4象限にあるから

$$\boldsymbol{p > 0,\ q < 0} \qquad \Rightarrow ①,\ ②$$

また，C_1 は x 軸の正の部分，負の部分の2点で交わることより，$f(0) < 0$ であるから



$$\boldsymbol{ap^2 + q < 0} \qquad \Rightarrow ②$$

◀ $f(0) = ap^2 + q$

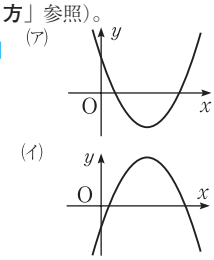
(2)　C_1 は x 軸の正の部分，負の部分の2点で交わるので，**方程式 $\boldsymbol{f(x) = 0}$ は正の解と負の解をもつ。** ⇨ ②

できなかったらココを復習！
条件とグラフの概形（「**考え方**」参照）。

(3)(i)　方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの正の解をもつような $y = f(x)$ のグラフを考える。適するのは

(ア)　頂点が第4象限にあり，y 切片が正で下に凸の放物線

(イ)　頂点が第1象限にあり，y 切片が負で上に凸の放物線



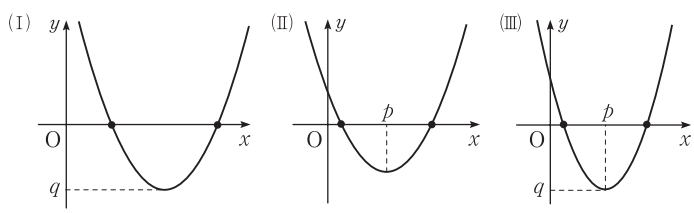
◀ (ア)

であるが，一つの操作だけで C_1 を(イ)にすることはできない。よって，C_1 が(ア)になる操作を考えると

(I)　頂点を x 軸の正の向きに平行移動する　◀ 操作 P1 を行う。

(II)　頂点を y 軸の正の向きに平行移動する　◀ 操作 Q1 を行う。

(III)　C_1 の方程式の a の値を大きくする　◀ 操作 A1 を行う。



の3通りである。これより，「方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの正の解をもつこと」が起こり得る操作は A1，P1，Q1 である。

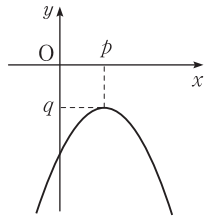
⇨ ⑥

また，不等式 $f(x) < 0$ の解がすべての実数となるような $y = f(x)$ のグラフを考える。適するのは

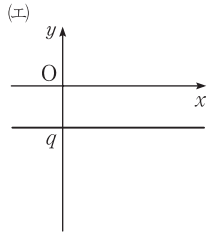
(ウ)　頂点の y 座標が負で，上に凸の放物線　◀ 操作 A2 を行い，$a < 0$ とする。

(エ)　y 切片が負で x 軸に平行な直線　◀ 操作 A2 を行い，$a = 0$ とする。

(ウ)



(エ)



である。これより，「不等式 $f(x)<0$ の解がすべての実数となること」が起こり得る操作は A2 である。 ⇨ ⓪

(ii) C_1 は x 軸と 2 点 $(3,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ で交わるので，C_1 の方程式の p について

$$p=\frac{3+(-2)}{2}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

◀点 $(p,\ 0)$ は 2 つの交点の中点である。

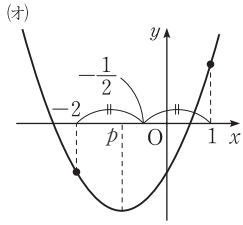
$-2\leqq x\leqq 1$ において $f(x)$ が最大になるのが $x=1$ のときのみであるような $y=f(x)$ のグラフを考える。適するのは

(オ) 軸 $x=p$ と直線 $x=-2$ の距離より，軸 $x=p$ と直線 $x=1$ の距離の方が大きい，下に凸の放物線

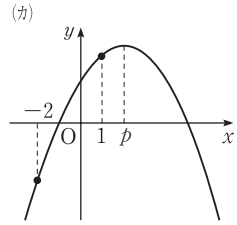
(カ) 軸が $-2<x<1$ になく，軸 $x=p$ と直線 $x=1$ の距離より，軸 $x=p$ と直線 $x=-2$ の距離の方が大きい，上に凸の放物線

◀軸が $-2<x<1$ にあるとき，$x=p$ で最大となる。

(オ)



(カ)



である。C_1 が(オ)になる操作は①より P2 であり

$$p<-\frac{1}{2}$$

となるように操作すればよい。 ⇨ ③，④

◀①より

$p<-\frac{1}{2}$

とする操作は P2 である。

また，C_1 が(カ)になる操作は①より，A2 かつ P1 であり

$a<0$ かつ $p\geqq 1$

となるようにそれぞれ操作すればよい。 ⇨ ①，②，⑤

◀①より

$p\geqq 1$

とする操作は P1 である。

できなかったらココを復習！

条件とグラフの概形（「**考え方**」参照）。

考え方

補足 条件とグラフの概形

(3)のポイントは

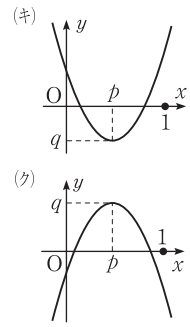
(A) 与えられた条件よりグラフの概形を把握する
(B) 操作によって，グラフがどう動くかを把握する

である。とくに，(A)は本問だけでなく，2 次関数の問題全般で大切である。

例えば，2 次関数 $f(x)=a(x-p)^2+q$ に対して

方程式 $f(x)=0$ が $0<x<1$ で異なる二つの解をもつ

$\Longrightarrow y=f(x)$ のグラフは(キ)または(ク)



となる。これより，a，p，q の満たす条件を考えていくわけだ。すると

(キ)　$a>0$，$0<p<1$，$q<0$，$f(0)>0$，$f(1)>0$

(ク)　$a<0$，$0<p<1$，$q>0$，$f(0)<0$，$f(1)<0$

が得られる。このように

条件 $\Longrightarrow$ 条件を満たすグラフ $\Longrightarrow$ 数式の条件に直す

をつねに意識しておこう。

次に，本問では，任意にグラフを動かせるのではなく，操作によって a，p，q の値が変わるので，(B)に注意が必要である。例えば，C_1 が(イ)になる操作は A2 かつ Q1 であり，一つの操作だけで C_1 を(イ)にすることはできない。ここで，各操作の図形的な意味を考えてみよう。まず，操作 A1，A2 については

p，q は変わらない $\Longrightarrow$ 頂点は固定

となるので，下の図 2 の青線のようにグラフは動く。同様にして

操作 P1，P2：C_1 を x 軸方向に平行移動

操作 Q1，Q2：C_1 を y 軸方向に平行移動

であり，下の図 3，図 4 の青線のようにグラフは動く。

図 2

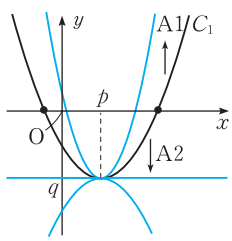


図 3

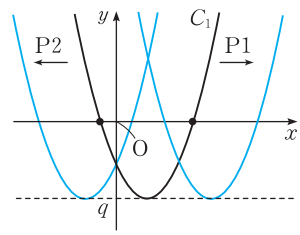
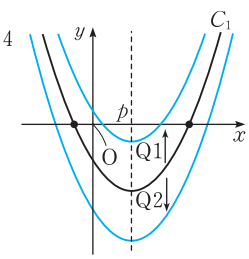


図 4



このように，本問では「操作によって C_1 は条件を満たすグラフに変わることができるかどうか」，すなわち(A)と(B)を同時に考える必要があり，ここが本問の難しい点であるといえる。また

(i)　「起こり得る」→ 必要条件（操作の中に条件を満たすものが含まれる）

(ii)　「となる」→ 必要十分条件（a や p の範囲も必要）

であり，(i)と(ii)の違いにも注意しよう。このように共通テストでは

・複雑な問題の設定を理解する（本問では(B)）

・問われていることを捉える（必要条件か必要十分条件かなど）

を意識して取り組むことが大切である。