

添削問題解答解説

微積分

XMAD7A-11C1-01

1 問題

a を実数の定数とする。 x の 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 6ax$ について、次の各問いに答えよ。(25 点)

(1) $f(x)$ が極値をもつとき、 a のとり得る値の範囲を求めよ。(4 点)

(2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ったときの余りを求めよ。ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表すものとする。(4 点)

(3) $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値、 $x = \beta$ で極小値をそれぞれとるとする。 $f(\alpha) - f(\beta) = 12\sqrt{3}$ のとき、 a の値を求めよ。(17 点)

ポイント

3 次関数の極値を題材とした問題で、数式処理の工夫も問われるもの。

(1) 3 次関数の極値を考察するので

導関数の符号を調べ、増減を捉える

のが基本である。つまり、 $f'(x)$ を求め、その符号を調べるわけだが、 $f'(x)$ は 2 次関数であるから、 $f(x)$ が極値をもつためには、2 次方程式 $f'(x) = 0$ がどのような条件をみたせばよいか？

(2) 実際に割り算を行えばよい。

(3) α 、 β は a を用いて表せるので

$f(\alpha) - f(\beta)$ を a で表す

という方針でよい。直接、 $f(x)$ の式に α や β の値を代入するとかなり計算が面倒になってしまうので、ここは工夫して処理したい。そこで

α 、 β が 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の解である (◀1)

ことに着目して、(2)を活用するのがうまい。

解答

(1) $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 6ax$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6ax + 6a \\ &= 3(x^2 + 2ax + 2a) \dots\dots\dots \text{①} \end{aligned}$$

$f(x)$ が極値をもつとき、2 次方程式 $f'(x) = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつ。よって、 $x^2 + 2ax + 2a = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a = a(a - 2)$$

であり、 $D > 0$ が成り立てばよいから、 a のとり得る値の範囲は

$a < 0$ または $2 < a$ 答 $\dots\dots\dots$ ②

(2) ①より、 $f(x)$ は

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{a}{3}\right)f'(x) + (4a - 2a^2)x - 2a^2 \dots\dots\dots \text{③}$$

と変形できるので、 $f(x)$ を $f'(x)$ で割ったときの余りは

$(4a - 2a^2)x - 2a^2$ 答

◀このように読み替えるのがポイント。

◀ $f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

$$\text{商} : \frac{1}{3}x + \frac{a}{3}$$

余り： $(4a - 2a^2)x - 2a^2$ となる。

(3) $f(x)$ の x^3 の係数が正であり、 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値、 $x = \beta$ で極小値をとるので、②のもとで $\alpha < \beta$ である。 α, β は 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の相異なる 2 つの実数解であるから

$$\alpha = -a - \sqrt{a^2 - 2a}, \beta = -a + \sqrt{a^2 - 2a} \quad \dots\dots\dots ④$$

となる。ここで、 $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ と③より

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (4a - 2a^2)\alpha - 2a^2 \\ f(\beta) &= (4a - 2a^2)\beta - 2a^2 \end{aligned}$$

であり、④より

$$\alpha - \beta = -2\sqrt{a^2 - 2a}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= 2(2a - a^2)(\alpha - \beta) \\ &= 4(a^2 - 2a)\sqrt{a^2 - 2a} \\ &= 4(a^2 - 2a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

したがって、 $f(\alpha) - f(\beta) = 12\sqrt{3}$ より

$$(a^2 - 2a)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore a^2 - 2a = 3$$

すなわち

$$(a + 1)(a - 3) = 0$$

②より、求める a の値は

$$a = -1, 3 \quad \text{答}$$

となる。

◀1

α, β が 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の解であることを利用する。

◀③において、 $x = \alpha$ を代入すると、 $f'(\alpha) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{a}{3}\right)f'(\alpha) \\ &\quad + (4a - 2a^2)\alpha - 2a^2 \\ &= (4a - 2a^2)\alpha - 2a^2 \end{aligned}$$

β についても同様である。

◀ $a < 0$ または $2 < a$ をみたす。

解説

1 別解 (3)解と係数の関係を用いて…

「解答」では、極値を求める際、割り算を用いて次数を下げる工夫をしているが、この他の処理の方法を紹介しておこう。

α, β は 2 次方程式 $x^2 + 2ax + 2a = 0$ の解であるから、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = 2a \quad \dots\dots\dots ⑤$$

が成り立つ。そこで

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (\alpha^3 - \beta^3) + 3a(\alpha^2 - \beta^2) + 6a(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\} + 3a(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + 6a(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

と変形して⑤を代入すると

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (\alpha - \beta)(4a^2 - 2a) - 6a^2(\alpha - \beta) + 6a(\alpha - \beta) \\ &= (4a - 2a^2)(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

となり、あとは「解答」のように $\alpha - \beta$ を計算して代入すればよい。

なお

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4a^2 - 8a \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha - \beta = -2\sqrt{a^2 - 2a} \quad (\because \alpha < \beta)$$

と処理することもできる。

2 別解 (3) $f(\alpha) - f(\beta)$ と $f'(x)$ をつなぐ関係に着目して ...

$$f(\alpha) - f(\beta) = \left[f(x) \right]_{\beta}^{\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx$$

という見方に気づけば、次のように処理することもできる。つまり、 α, β は 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の 2 解であるから、 $f'(x)$ の最高次の係数が 3 であることに注意して

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

と表せる。これより

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} 3(x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{3}{6}(\alpha - \beta)^3 \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^3 \end{aligned}$$

あとは、 $\alpha - \beta = -2\sqrt{a^2 - 2a}$ を代入すれば「解答」と同じ結果が導ける。

極意

・計算がラクになるような式処理の工夫を心がけよ

本問では極値の計算がラクになるように、考え方を(2)で誘導している。これは“次数下げ”という手法であり、誘導なしでも行えるようにしておこう。

(例) 関数 $f(t) = \int_t^{t+1} |x(x-2)| dx$ について

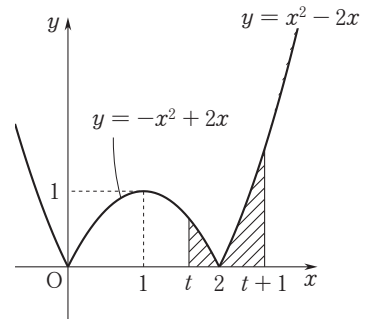
- (1) $1 \leq t \leq 2$ のとき $f(t)$ を求めよ。
- (2) $1 \leq t \leq 2$ のとき $f(t)$ の最小値を求めよ。

(東北学院大・一部改題)

(解答)

- (1) $1 \leq t \leq 2$ のとき、 $f(t)$ は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_t^2 -x(x-2) dx + \int_2^{t+1} x(x-2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_t^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^{t+1} \\ &= -\left(\frac{8}{3} - \frac{t^3}{3} \right) + 4 - t^2 \\ &\quad + \frac{(t+1)^3}{3} - \frac{8}{3} - \{ (t+1)^2 - 4 \} \\ &= \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



- (2) (1)より

$$f'(t) = 2t^2 - 2t - 1$$

であるから、 $1 \leq t \leq 2$ における $f(t)$ の増減は右の表のようになり、 $t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $f(t)$ は極小かつ最小になる。ここで

$$f(t) = \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{6} \right) f'(t) - t + \frac{11}{6}$$

であるから、求める最小値は

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{6} = \frac{8-3\sqrt{3}}{6} \quad (\text{答})$$

t	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	2
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		↘	↗