問題

次の関数の極限が存在するかどうかを調べ，存在するときはその極限を求めよ。　(25点)

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$　(6点)　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$　(8点)

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$　(5点)　　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$　(6点)

着眼

関数の極限についての計算問題で，基本的な極限の扱いを確認するのがねらいである。関数の極限も数列の極限と考え方はほとんど同じで

“いかにして不定形を解消するか”

がポイントであり，そのための変形方法に十分慣れておくことが大切である。

(1)　$\dfrac{-\infty}{\infty}$ の不定形となる分数関数の極限であり，分母・分子の最も速く大きくなる項に着目すればよい。ひとまず，分母の絶対値をはずすことから始めよう。

(2)　$\dfrac{0}{0}$ の不定形であり，これを解消するために分母・分子の約分に気づきたい。(1)と同様分母の絶対値をはずすことから始めればよいが，このときに $x\to-1+0$ の場合と $x\to-1-0$ の場合を分けて考えることが必要となる。片側極限と極限の関係に注意しよう。

(3)　これも $\dfrac{0}{0}$ の不定形である。3 角関数の極限では

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

を用いることが多く，この形にもち込むことを考えればよい。

(4)　与式の一部分だけの極限を先にとって，“$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}=1$ から，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}1^x=1$” などとすることはできない。本問では，底$\to1$，指数$\to\infty$ となっていることから，自然対数の底 e の定義

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

の利用を考えよう。

解答

(1)　$x\to-\infty$ のときを考えるので，$x<-1$ としてよく

$$|x+1|=-(x+1)\qquad\therefore\quad|x+1|^3=-(x+1)^3$$

したがって

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=\lim_{x\to-\infty}\left\{-\frac{x^3+1}{(x+1)^3}\right\}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{-\frac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}\right\}$$

$$=-1$$　**(答)**

◀まず，絶対値記号をはずす。$x\to-\infty$ のときを考えるので，$x<-1$ として構わない。

◀分母・分子を x^3 ($\neq0$) で割る。

(2)
$$|x+1|^3=\begin{cases}(x+1)^3 & (x>-1\text{ のとき})\\ -(x+1)^3 & (x<-1\text{ のとき})\end{cases}$$
であるから

◀「$x\to-1$」の極限を考えるので，「$x\to-1+0$」と「$x\to-1-0$」の 2 つの片側極限に分けて調べる。

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{(x+1)^3}$$
$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^3}$$
$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}$$

◀まず，$x\to-1+0$ のときの極限を考える。

◀分子が因数分解できる。

◀分母・分子を $x+1\,(\neq 0)$ で割ることにより，不定形が解消された。

ここで，$x\to-1+0$ のとき
$$(x+1)^2\to+0,\quad x^2-x+1\to3$$
であるから
$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=+\infty$$
一方，同様にして
$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=\lim_{x\to-1-0}\left\{-\frac{x^3+1}{(x+1)^3}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-1-0}\left\{-\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right\}$$

◀次に，$x\to-1-0$ のときの極限を考える。

であり，$x\to-1-0$ のとき
$$(x+1)^2\to+0,\quad x^2-x+1\to3$$
であるから
$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=-\infty$$
以上より，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}\neq\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$ だから

◀「**解説 1**」参照。

$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}}$ **は存在しない。**　　**(答)**

(3)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x(1+\cos3x)}{1-\cos^2 3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x(1+\cos3x)}{\sin^2 3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1+\cos3x}{9}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{3x}{\sin3x}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1+1}{9}\cdot1\cdot1$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{9}}\qquad\textbf{(答)}$$

◀分母・分子に $1+\cos3x$ をかけた。別解は「**解説 2**」を参照せよ。

◀ $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を利用する。

(4)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2$$
$$=\boldsymbol{e^2}\qquad\textbf{(答)}$$

◀ e の定義を利用できる形に変形していく。

◀ $\displaystyle\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=e$ より。

解説

1 補足　片側極限

(2)では，片側極限と極限の関係

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \iff \lim_{x\to a} f(x) \text{ が存在する}$$

を用いたわけで，本問では左極限と右極限のそれぞれが

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x^3+1}{|x+1|^3} = -\infty,\quad \lim_{x\to -1+0} \frac{x^3+1}{|x+1|^3} = +\infty$$

のように異なるので，“極限は存在しない”ということになる。

2 別解　(3)変形の仕方を変えて…

(3)は 2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ から導かれる

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

を用いて次のように変形してもよい。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2\sin^2\frac{3x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \right\} = \frac{2}{9}$$

なお，本問とほぼ同様の変形によって

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

が得られるが，この結果は利用価値が高いので，準公式として覚えておいてもよいだろう。本問も上式に帰着させると

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{9} \cdot \frac{(3x)^2}{1-\cos 3x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{9}$$

のように求められる。

3 補足　3 角関数の極限，e の定義

3 角関数の絡んだ極限の問題では

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\sin\square}{\square} = 1$$

を，また，「n の式の n 乗」のような形の極限では自然対数の底 e の定義

$$\lim_{\square\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square} = e,\quad \lim_{\square\to 0} (1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$$

を用いることが多い。このとき，極限の中身の式において□の部分には同じものが入らなくてはいけないことに注意しよう。たとえば，$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1$ などとはならず，正しくは

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

とする必要があるわけだ。