問題

a を $a \neq 0$ をみたす 実数とする。x の 2 次方程式 $x^2 + ax + a^2 = 0$ の 2 つの解を α，β とし，自然数 m，n に対して

$$f(m,\ n) = \frac{\beta^m}{\alpha^n} + \frac{\alpha^m}{\beta^n}$$

とする。$1 \leqq m \leqq 20$，$1 \leqq n \leqq 20$ のとき，任意の実数 $a\ (\neq 0)$ に対して

$$f(m,\ n) = 2a^{10}$$

が成り立つような m，n の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。　　（25 点）

ポイント

$f(m, n)$ を a の式で表すのが第一歩。もちろん解と係数の関係を利用することになるが，これだけで式を整理するのは難しい。ここでは，α，β が 2 次方程式 $x^2 + ax + a^2 = 0$ の解であることから，**この 2 次方程式の形に着目して，α，β がもつ性質を見抜きたい（◀1）**。あとは，a の式で表した $f(m, n)$ の形を見て，これが任意の実数 a（$\neq 0$）に対して $2a^{10}$ と等しくなるための条件を考えればよい。

解　答

x の 2 次方程式 $x^2 + ax + a^2 = 0$ の 2 解 α，β に対して，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = a^2 \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$$

であるから

$$\alpha^3 = \beta^3 = a^3 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。

◀1 周期性の利用を見抜けるかがカギとなる。

ここで，① より

$$f(m,\ n) = \frac{\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}}{(\alpha\beta)^n} = \frac{\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}}{a^{2n}}$$

と変形できる。さて，①, ② を用いて，$f(m,\ n)$ を a で表すことを考える。

◀② より，$m+n$ を 3 で割った余りによって分類することに気づきたい。

(i)　$m + n = 3M\ (M = 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$f(m,\ n) = \frac{\alpha^{3M} + \beta^{3M}}{a^{2n}} = \frac{(\alpha^3)^M + (\beta^3)^M}{a^{2n}}$$

$$= \frac{2a^{3M}}{a^{2n}} = \frac{2a^{m+n}}{a^{2n}} = 2a^{m-n}$$

(ii)　$m + n = 3M + 1\ (M = 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$f(m,\ n) = \frac{\alpha^{3M+1} + \beta^{3M+1}}{a^{2n}} = \frac{(\alpha^3)^M\alpha + (\beta^3)^M\beta}{a^{2n}}$$

$$= \frac{\alpha^{3M}(\alpha+\beta)}{a^{2n}} = \frac{a^{m+n-1}(\alpha+\beta)}{a^{2n}}$$

$$= a^{m+n-1} \cdot (-a) \cdot a^{-2n} = -a^{m-n}$$

(iii)　$m+n=3M+2\,(M=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$f(m,\ n) = \frac{\alpha^{3M+2}+\beta^{3M+2}}{a^{2n}} = \frac{(\alpha^3)^M\alpha^2+(\beta^3)^M\beta^2}{a^{2n}}$$

$$= \frac{\alpha^{3M}(\alpha^2+\beta^2)}{a^{2n}} = \frac{a^{m+n-2}(\alpha^2+\beta^2)}{a^{2n}}$$

$$= a^{m-n-2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

$$= a^{m-n-2}(a^2-2a^2)$$

$$= -a^{m-n}$$

(i)，(ii)，(iii)より任意の実数 a に対して

$$f(m,\ n) = 2a^{10}$$

が成り立つためには，自然数 $m,\ n$ について

$$\begin{cases} m+n=3M \\ m-n=10 \end{cases}$$

が成り立てばよく，これを $m,\ n$ について解くと

$$m = \frac{3M+10}{2},\ n = \frac{3M-10}{2}$$

となるから，$m,\ n$ が自然数であることより

M は偶数

がわかる。

そこで，$M=2N$ とおくと

$$m=3N+5,\ n=3N-5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となり，$1 \leqq m \leqq 20,\ 1 \leqq n \leqq 20$ より

$$1 \leqq 3N+5 \leqq 20,\ 1 \leqq 3N-5 \leqq 20$$

$$\therefore\quad 6 \leqq 3N \leqq 15 \quad すなわち\quad N=2,\ 3,\ 4,\ 5$$

よって，③へ代入すれば，求める組 $(m,\ n)$ は

$$\boldsymbol{(m,\ n)=(11,\ 1),\ (14,\ 4),\ (17,\ 7),\ (20,\ 10)}$$ 答

◀ $a=1$ のとき
$2a^{10} \neq -a^{m-n}$
なので，(ii)，(iii)では任意の a で $f(m,\ n)=2a^{10}$ となることはない。

極　意

・周期性を利用する

本問では，$\alpha^3=\beta^3=a^3$ が成り立つことから，$f(m, n)$ の値に周期性が生まれ，それを利用して $f(m, n)=2a^{10}$ が a（$\neq 0$）についての恒等式になるような m, n の組を求めた。数列の問題でも，いきなり一般項を求めようとすると難しいが，周期性に気づけば一般項が求められることがある。$n=1, 2, \cdots$ の場合を具体的に調べて，周期性を見つけるところがポイントである。

以下の問題の (3) のように，次数が高い場合，直接答えを求めるのが難しい場合がある。ここでも“周期性”に着目してみよう。

（例）2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2)　β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3)　α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　（東大）

（解答）

(1)　$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=-1$ だから，

$$s_1=4,\ s_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=18,$$

$$s_3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=76$$

そして，$\alpha^2=4\alpha+1$，$\beta^2=4\beta+1$ より

$$\alpha^n=4\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2},\ \beta^n=4\beta^{n-1}+\beta^{n-2}$$

だから，辺々たして

$$s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$$

(2)　$\beta=2-\sqrt{5}$ だから，$-1<\beta<0$ より

$$-1<\beta^3<0$$

だから，β^3 以下の最大の整数は -1 である。

(3)　$-1<\beta<0$ より

$$-1<\beta^{2003}<0$$

であり，s_n は整数だから，

$$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$$

において，α^{2003} 以下の最大の整数は s_{2003} である。

　ここで以下の合同式を 10 を法として書くと

$$s_1\equiv 4,\ s_2\equiv 8,\ s_3\equiv 6,\ s_4\equiv 2,\ s_5\equiv 4,\ s_6\equiv 8$$

だから，4，8，6，2 を繰り返す。$2003=4\cdot 500+3$ だから

$$s_{2003}\equiv 6$$

よって，求める値は 6 である。