# 図形と方程式 1　2回目
## 添削問題

QMT5L1-T1A2-01

※ここからは『Z Study　解答用紙編』の数学「図形と方程式 1」2枚目にご記入ください。

**2**　$xy$ 平面上に，2 つの直線

$$\ell : x-2y+1=0,\ m : x+y-17=0$$

と点 A(2, 9) がある。このとき，次の各問いに答えよ。(配点　50)

(1)　点 A を直線 $\ell$，$m$ に関してそれぞれ対称移動した点 B，C の座標を求めよ。

(25 点)

(2)　直線 $m$ 上に点 D(0, 17) をとる。点 P が直線 $\ell$ 上を動くとき，2 つの線分の長さの和 AP＋PD の最小値と，そのときの点 P の座標をそれぞれ求めよ。(10 点)

(3)　2 点 P，Q がそれぞれ直線 $\ell$，$m$ 上を動くとき，線分の長さの和 AP＋PQ＋QA の最小値と，そのときの点 P，Q の座標をそれぞれ求めよ。ただし，2 点 P，Q が一致するとき，PQ の長さは 0 とする。(15 点)

# 図形と方程式 1　2回目
## 添削問題 解答解説

QMT5L1-T1C2-01

**2** $xy$ 平面上に，2つの直線

$$\ell : x-2y+1=0,\ m : x+y-17=0$$

と点 A(2, 9) がある。このとき，次の各問いに答えよ。(配点　50)

(1) 点 A を直線 $\ell$，$m$ に関してそれぞれ対称移動した点 B，C の座標を求めよ。(25 点)

(2) 直線 $m$ 上に点 D(0, 17) をとる。点 P が直線 $\ell$ 上を動くとき，2つの線分の長さの和 AP＋PD の最小値と，そのときの点 P の座標をそれぞれ求めよ。(10 点)

(3) 2点 P，Q がそれぞれ直線 $\ell$，$m$ 上を動くとき，線分の長さの和 AP＋PQ＋QA の最小値と，そのときの点 P，Q の座標をそれぞれ求めよ。ただし，2点 P，Q が一致するとき，PQ の長さは 0 とする。(15 点)

### 攻略点

(1) 求める点の座標を文字でおいてから考え始めよう。たとえば点 B については，線分 AB の垂直 2 等分線が直線 $\ell$ であるから，線分 AB の中点の位置と，直線 AB と $\ell$ の関係に着目するとよい。点 C についても同様である。

(2) 直接，AP＋PD の最小値を考えるのは難しいので，うまく工夫して処理しよう。点 P は直線 $\ell$ 上にあり，(1)の点 B は直線 $\ell$ に関する点 A の対称点であるから

AP＝BP

が成り立つ。そこで，BP＋PD の最小値を求めればよいわけだ。あとは，図を利用して考察すると…。

(3) 本問も，(2)と同様に対称点の性質に着目して処理するとよい。(1)の点 B，C を用いると AP＋PQ＋QA はどのように書き換えることができるだろうか？

### 解　答

(1) 点 B の座標を $(X_1,\ Y_1)$ とおくと，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{X_1+2}{2},\ \dfrac{Y_1+9}{2}\right)$ は直線 $\ell$ 上にあるから

◀分点公式。

$$\frac{X_1+2}{2}-2\cdot\frac{Y_1+9}{2}+1=0$$

$$\therefore\ X_1-2Y_1-14=0 \quad \cdots\cdots①$$

また，直線 AB の方程式は

$$(Y_1-9)(x-2)-(X_1-2)(y-9)=0$$

◀2点を通る直線の方程式。

$$\therefore\ (Y_1-9)x-(X_1-2)y+9X_1-2Y_1=0$$

であり，これが直線 $\ell$ に垂直であるから

$$1\cdot(Y_1-9)+(-2)\cdot\{-(X_1-2)\}=0$$

◀2直線の垂直条件。

$$\therefore\ 2X_1+Y_1-13=0 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ。よって，①，②より，求める点 B の座標は

**B(8，－3)　（答）**

同様に，点 C の座標を $(X_2,\ Y_2)$ とすると，線分 AC の中点は直線 $m$ 上にあるから

$$\frac{X_2+2}{2}+\frac{Y_2+9}{2}-17=0$$

◀線分 AC の中点の座標は $\left(\frac{X_2+2}{2},\ \frac{Y_2+9}{2}\right)$

$$\therefore\quad X_2+Y_2-23=0\quad\cdots\cdots③$$

また，直線 AC の方程式は

$$(Y_2-9)x-(X_2-2)y+9X_2-2Y_2=0$$

◀直線 AB の方程式において $X_1 \Longrightarrow X_2$，$Y_1 \Longrightarrow Y_2$ と書き直したダケである。

であり，これが直線 $m$ に垂直であるから

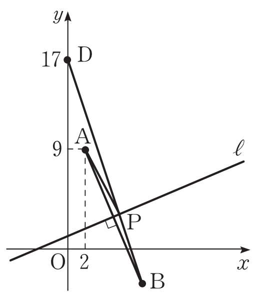
$$1\cdot(Y_2-9)+1\cdot\{-(X_2-2)\}=0$$

$$\therefore\quad X_2-Y_2+7=0\quad\cdots\cdots④$$

が成り立つ。よって，③，④より，求める点 C の座標は

**C(8，15)　（答）**

(2)　点 B は直線 $\ell$ に関する点 A の対称点であるから




$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$$

◀このことに気づいてほしい。

が成り立つ。2 直線 BD と $\ell$ の交点を $\mathrm{P}_1$ とすると

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PD}=\mathrm{BP}+\mathrm{PD}$$
$$\geqq \mathrm{BP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{D}=\mathrm{BD}$$

◀この不等式を左図を用いて導くところがポイント。

が成り立ち，等号は P と $\mathrm{P}_1$ が一致するときに成立する。ここで，直線 BD の方程式は

$$(-3-17)(x-8)-(8-0)(y+3)=0$$

$$\therefore\quad 5x+2y-34=0\quad\cdots\cdots⑤$$

であるから，$\ell$ の方程式と⑤を連立して解くことにより

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{11}{2},\ \frac{13}{4}\right)$$

となる。また

$$\mathrm{BD}=\sqrt{(0-8)^2+\{17-(-3)\}^2}=4\sqrt{29}$$

◀2 点間の距離の公式。

であるから，AP＋PD の最小値と，そのときの点 P の座標は

**最小値：$4\sqrt{29}$　$\left(\mathrm{P}\left(\frac{11}{2},\ \frac{13}{4}\right)のとき\right)$　（答）**

(3)　(2)と同様に

$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP},\ \mathrm{QA}=\mathrm{QC}$$

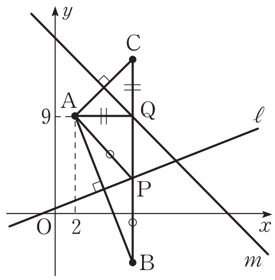
◀やはり，この対称点の性質を利用するのがポイント。

が成り立つ。また，2 直線 BC と $\ell$，BC と $m$ の交点をそれぞれ $\mathrm{P}_2$，$\mathrm{Q}_2$ とすると

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QA}=\mathrm{BP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$$

$\geqq BP_2+P_2Q_2+Q_2C=BC$

が成り立ち，等号は P と $P_2$，Q と $Q_2$ が一致するときに成立する。




◀図を利用して，この不等式に気づいてほしい。

ここで，直線 BC の方程式は

$x=8$ ……⑥

であるから，$\ell$，$m$ の方程式と⑥をそれぞれ連立して解くことにより

$$P_2\left(8,\ \frac{9}{2}\right),\ Q_2(8,\ 9)$$

となる。また

$BC=|15-(-3)|=18$

◀2 点 B，C の $x$ 座標は等しいので，このように簡単に求めることができる。

であるから，AP＋PQ＋QA の最小値と，そのときの点 P，Q の座標は

**最小値：18** $\left(\mathbf{P}\left(8,\ \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\right),\ \mathbf{Q}(8,\ \mathbf{9})\ \text{のとき}\right)$ **（答）**