

高1 東大総合演習 4月 数学

ZMF1B1-Z1A1-01

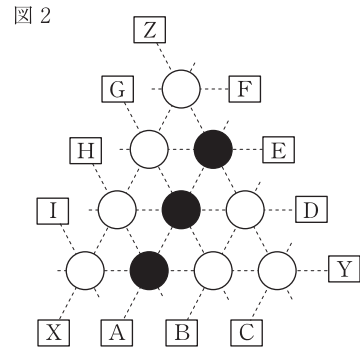
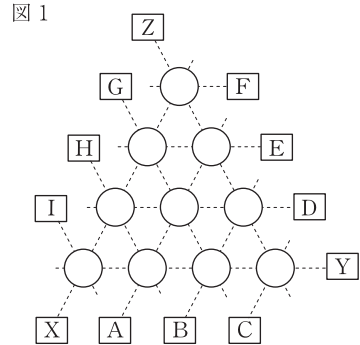
1

右の図1のように、片方の面が白、もう片方の面が黒のコマを10枚、白い面を上にしてピラミッド状に並べ、A～I, X～Zの列をつくる。また、袋の中にA～Iの文字が1つずつかかれた9枚のカードと、X～Zの文字が1つずつかかれたカードがそれぞれ2枚ずつ、計15枚のカードが入っている。ここで、次のような操作Mを繰り返し行う。

〈操作M〉

- ・袋の中から1枚のカードを取り出す。
- ・カードにかかれた文字と同じ文字の列のコマすべてをひっくり返す。
- ・取り出したカードを袋に戻す。
- ・操作後、コマを元には戻さない。

たとえば、1回目の操作MでAがかかれたカードを取り出したとすると、操作後のコマは右の図2のようにになっている。このとき、次の問いに答えよ。



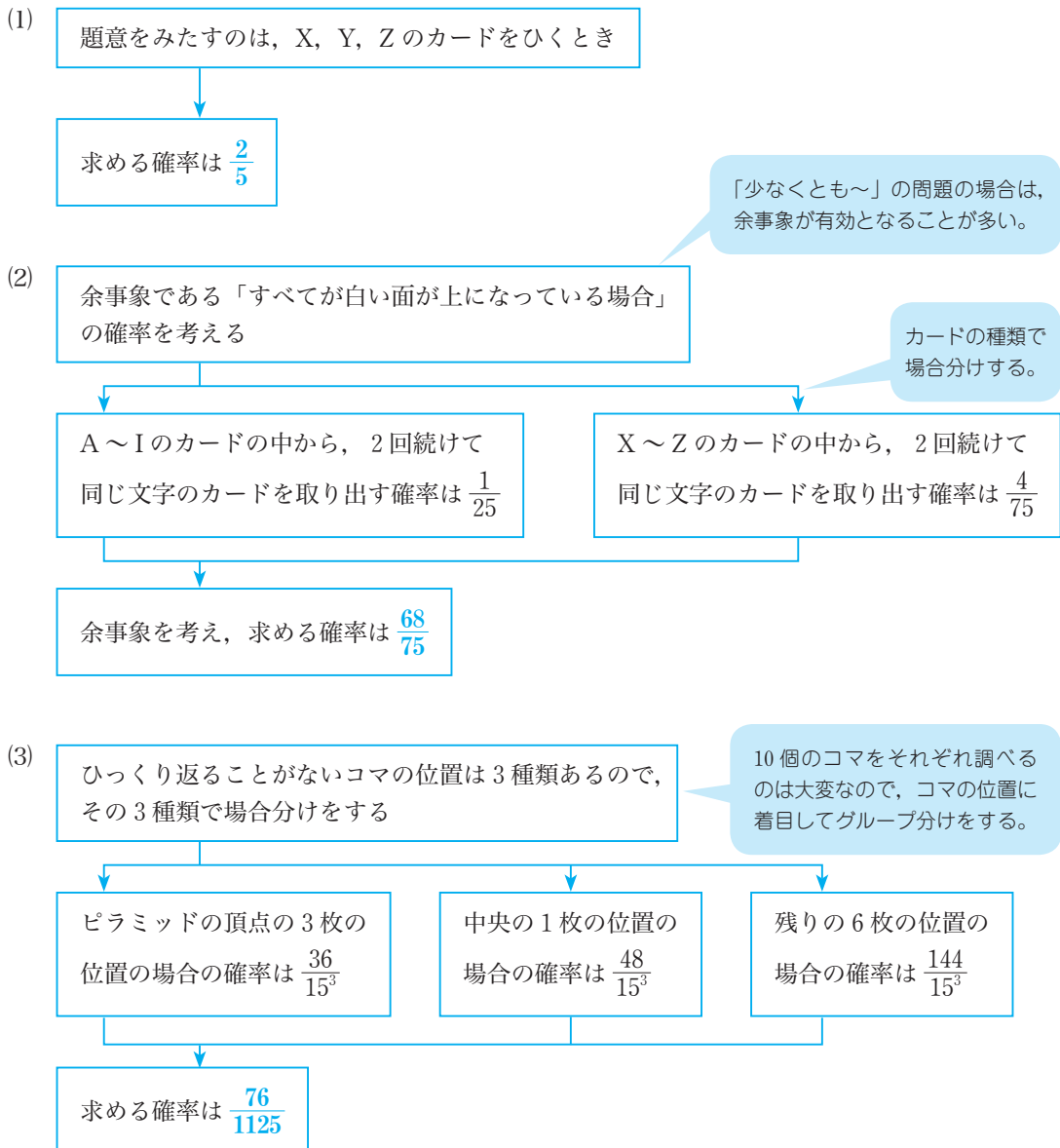
(配点 50)

- (1) 操作Mを1回行ったとき、黒い面が上になっているコマが4枚となっている確率を求めよ。(12点)
- (2) 操作Mを2回繰り返したとき、少なくとも1枚が黒い面が上になっているコマである確率を求めよ。(18点)
- (3) 操作Mを3回繰り返したとき、一度もひっくり返ることがないコマが1枚だけ存在する確率を求めよ。(20点)

1

速解！本問のツボ

➡ 解答の流れを下の図で簡単に確認しよう。



解答

- (1) X, Y, Zのカードをひくと4枚のコマがひっくり返り黒い面が上になる。X, Y, Zはそれぞれ2枚ずつあるので、求める確率は

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad (\text{答})$$

- (2) まず、操作Mを2回繰り返したとき、すべてのコマが白い面が上になっている確率について考える。

- (I) A～Iのカードの中から、2回続けて同じ文字がかかれたカードを取り出すとき、その確率は

$$\left(\frac{1}{15}\right)^2 \times 9 = \frac{1}{25}$$

- (II) X～Zのカードの中から、2回続けて同じ文字がかかれたカードを取り出すとき、その確率は

$$\left(\frac{2}{15}\right)^2 \times 3 = \frac{4}{75}$$

よって、(I), (II)より、すべてのコマが白い面が上になっている確率は

$$\frac{1}{25} + \frac{4}{75} = \frac{7}{75}$$

ゆえに、求める確率は

$$1 - \frac{7}{75} = \frac{68}{75} \quad (\text{答})$$

- (3) ひっくり返ることがないコマの位置に着目して場合分けをする。

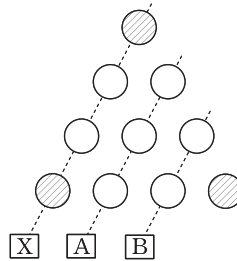
- (I) ピラミッドの頂点の3枚

たとえば、右下端のコマがひっくり返らない場合、A, B, Xがかかれたカードを1回ずつ取り出せばよいので、その確率は

$$\frac{1}{15} \times \frac{1}{15} \times \frac{2}{15} \times 3! = \frac{12}{15^3}$$

他の2枚のコマについても同様に考えることができるので、この場合の確率は

$$\frac{12}{15^3} \times 3 = \frac{36}{15^3}$$



◀1度の操作で4枚ひっくり返るカードを選ばばよい。

◀余事象の考え方を利用する。

◀すべてのコマが白い面が上になるのは2回続けて同じ文字がかかれたカードを取り出すときである。よって、カードの種類で場合分けをする。

◀A, B, Xのカードの取り出し方は3!通りある。

(II) 中央の1枚

X, Y, Zがかかれたカードを1回ずつ取り出せばよいので、この場合の確率は

$$\frac{2}{15} \times \frac{2}{15} \times \frac{2}{15} \times 3! = \frac{48}{15^3}$$

(III) (I), (II)の場合以外の6枚

たとえば、上から2段目、左端のコマがひっくり返らない場合、D, Y, Zがかかれたカードを1回ずつ取り出せばよいので、その確率は

$$\frac{1}{15} \times \frac{2}{15} \times \frac{2}{15} \times 3! = \frac{24}{15^3}$$

他の5枚のコマについても同様に考えることができるので、この場合の確率は

$$\frac{24}{15^3} \times 6 = \frac{144}{15^3}$$

ゆえに、(I)~(III)より、題意をみたま確率は

$$\frac{36}{15^3} + \frac{48}{15^3} + \frac{144}{15^3} = \frac{228}{15^3}$$

$$= \frac{76}{1125} \quad (\text{答})$$

