添削問題

目標解答時間　60分

# 高2東大総合演習　3月　数学

ZMFAA1-Z1A1-01

## 1

$\sin 10^\circ > 0.17$ を示せ。　　（配点　50）

# 高2東大総合演習　3月　数学

ZMFAA1-Z1C1-01



## 1

### 速解！本問のツボ

$\sin 10^\circ$ の値はわからないので $30^\circ$，$45^\circ$，$60^\circ$ など，値のわかる三角比を用いて $\sin 10^\circ$ を表せないか考える

・加法定理
・２倍角の公式，３倍角の公式
・半角の公式
などを利用して $\sin 10^\circ$ を含む式をつくることができないか考える。

↓

$30^\circ = 10^\circ \times 3$ なので，３倍角の公式を使うと $\sin 10^\circ$ を含む式をつくることができる

$$8\sin^3 10^\circ - 6\sin 10^\circ + 1 = 0$$

↓

$f(x) = 8x^3 - 6x + 1$ と設定すると
$x = \sin 10^\circ$ は $f(x) = 0$ の１つの解

↓

この方程式を解くのは難しい

↓

$f(x)$ の増減や $y = f(x)$ のグラフから
$f(x) = 0$ の解がどのくらいの値になるか調べる

関数を設定することで，大小関係が比較できるようになる。このとき，グラフを用いると視覚的に考察しやすい。

## 解答

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より，$\theta = 10^\circ$ とすると

$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$$

◀ 3 倍角の公式

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ より

$$8\sin^3 10^\circ - 6\sin 10^\circ + 1 = 0$$

◀ $\dfrac{1}{2} = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$

つまり，$x = \sin 10^\circ$ は方程式

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

の解の 1 つである。$f(x) = 8x^3 - 6x + 1$ とすると

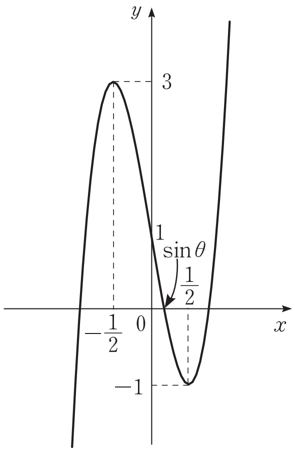
$$f'(x) = 24x^2 - 6 = 24\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

◀この方程式の解を求めるのは難しいので，左辺を $f(x)$ とおいてその増減を調べる。

したがって，$f(x)$ の増減は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-\dfrac{1}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

$y = f(x)$ のグラフは次のようになる。




$f(\sin 10^\circ) = 0$，$f(0.17) = 0.019304 > 0$ より

$$f(0.17) > f(\sin 10^\circ)$$

$0 < 0.17 < \dfrac{1}{2}$，$0 < \sin 10^\circ < \dfrac{1}{2}$ であり，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ の区間において $f(x)$ は単調減少であるから

$$\sin 10^\circ > 0.17$$

（証終）

◀$a$，$b$ を含む区間で $f(x)$ が単調に減少するとき
$a < b \iff f(a) > f(b)$

## 解説

### A 補足 幾何学的アプローチ

図形的に考える解法を紹介する。

半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形の面積を $S_n$ とすると

$$S_{36}=36\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin10^\circ\right)=18\sin10^\circ$$

$$S_{24}=24\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin15^\circ\right)=12\sin15^\circ$$

ここで

$$\begin{aligned}\sin15^\circ&=\sin(45^\circ-30^\circ)\\&=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

よって

$$S_{24}=12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

また

$$2.44^2=5.9536<6,\quad 1.42^2=2.0164>2$$

より

$$\sqrt{6}>2.44,\quad \sqrt{2}<1.42$$

であるから

$$3(\sqrt{6}-\sqrt{2})>3(2.44-1.42)=3.06$$

したがって，$S_{36}>S_{24}$ より

$$18\sin10^\circ>3(\sqrt{6}-\sqrt{2})>3.06$$

よって

$$\sin10^\circ>\frac{3.06}{18}=0.17$$

（証終）