1章

数と式：ポイント整理

ZMC2A1-Z1J1-01
学習時間のめやす 60分

§1　整式と実数

0 この単元のポイント

ここでは，整式の四則演算，および実数(有理数と無理数を合わせた数)の扱いを復習する．以下4ページで取り上げる内容は，「数学」をやる上で“お約束！”というものばかり．すなわち，これらの知識がなければ，他の分野の問題はほとんど解けない．したがって，数学が苦手で苦手で…という人は，ここで学習する内容をきちんと押さえ，関連する問題の演習を繰り返そう．

1 整式の加法・減法

これは説明がなくても大丈夫だろう．下の 例1 で確認しておこう．

例1　$A=5x^3+7x^2-3$，$B=x^3-6x^2-3x-5$ のとき，$A-B$ を計算せよ．

解

$$
\begin{aligned}
A-B&=(5x^3+7x^2-3)-(x^3-6x^2-3x-5)\\
&=(5-1)x^3+\{7-(-6)\}x^2-(-3)x-3-(-5)\\
&=4x^3+13x^2+3x+2\quad(\text{答})
\end{aligned}
$$

←同類項をまとめる．

2 整式の乗法

まずは，指数法則についてまとめておこう．

重要ポイント　指数法則

m，n を正の整数とするとき

① $a^ma^n=a^{m+n}$

② $a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n\text{ のとき})\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n\text{ のとき})\end{cases}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^nb^n$

整式の乗法は，分配法則を用いて，次のように計算すればよい．

$$(a+b)(c+d)=\underset{①}{ac}+\underset{②}{ad}+\underset{③}{bc}+\underset{④}{bd}$$

例2　$x^2(x^3)^2\div x^4$ を計算せよ．

解

$$
\begin{aligned}
x^2(x^3)^2\div x^4&=x^2x^{3\times2}\div x^4\\
&=x^2x^6\div x^4=x^{2+6-4}=x^4\quad(\text{答})
\end{aligned}
$$

←指数法則③．
←指数法則①，②．

例3　$(x+y)(2x+5y-4)$ を計算せよ．

解

$$
\begin{aligned}
(x+y)(2x+5y-4)&=2x^2+5xy-4x+2xy+5y^2-4y\\
&=2x^2+5y^2+7xy-4x-4y\quad(\text{答})
\end{aligned}
$$

←分配法則．
←降べきの順に整理する．

3 乗法公式，因数分解の公式

重要ポイント　乗法公式

⓪ $a(x+y)=ax+ay$

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑤ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑥ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑦ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

重要ポイント　因数分解の公式

⓪ $ax+ay=a(x+y)$

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

④ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

⑤ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$，$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

⑥ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⑦ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

Z会では，３次の乗法公式・因数分解の公式についても「数と式」で扱うことにします．

例４　$6x^2-7x-3$ を因数分解せよ．

解　たすきがけを利用すると

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & & -3 & \longrightarrow & -9 \quad (+ \\
\hline
 & & & & -7
\end{array}
$$

であるから

$6x^2-7x-3=(3x+1)(2x-3)$　　(答)

←かけて６になる２数の組合せと，かけて -3 になる２数の組合せを考える．

例５　$2x^2-xy-3y^2+5x-5y+2$ を因数分解せよ．

解　$(与式)=2x^2+(-y+5)x-(3y^2+5y-2)$

$=2x^2+(-y+5)x-(3y-1)(y+2)$

たすきがけを利用すると

$$
\begin{array}{ccccc}
2 & \times & -(3y-1) & \longrightarrow & -3y+1 \\
1 & & y+2 & \longrightarrow & 2y+4 \quad (+ \\
\hline
 & & & & -y+5
\end{array}
$$

したがって

$(与式)=\{2x-(3y-1)\}\{x+(y+2)\}$

$=(2x-3y+1)(x+y+2)$　　(答)

← x について整理する．

←たすきがけを利用する．

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & \times & -1 & \rightarrow & -1 \\
1 & & 2 & \rightarrow & 6 \quad (+ \\
\hline
 & & & & 5
\end{array}
$$

4 有理数と無理数

すべての数(実数)は「有理数」と「無理数」からなる．有理数とは，$\dfrac{m}{n}$ (m，n は整数，$n \neq 0$) の形で表される数のことで，無理数はそれ以外の数のことを指すのであった．

実数は次のように分類される．

$$
\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正の整数(自然数)}\\ 0\\ \text{負の整数}\end{cases}\\ \text{整数でない有理数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{循環小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{無理数}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{循環しない無限小数}\end{cases}
$$

無限小数

ここで，諸君があまり得意でない(？)循環小数について簡単な例で復習しておこう．

例 6 $x = 0.\dot{7}\dot{8}$ を既約分数で表せ．

解 両辺を 100 倍したものから辺々をひくと

$$
\begin{array}{rrl}
 & 100x = & 78.7878\cdots \\
-) & x = & 0.7878\cdots \\
\hline
 & 99x = & 78
\end{array}
$$

←循環する部分が重なるように，両辺に 100 をかけた．

したがって

$$x = \frac{78}{99} = \frac{26}{33} \qquad \text{(答)}$$

←約分を忘れずに．

次に，絶対値についてまとめておく．

重要ポイント　絶対値

実数 a について

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

また，実数 a の絶対値について，次の性質が成り立つ．

① $|a| \geqq 0$ ($|a| = 0$ となるのは $a = 0$ のときに限る)

② $|-a| = |a|$

③ $|a|^2 = a^2$

例 7 $a = -2$，$b = 3$ のとき，$|a+b|$，$|a-b|$，$|ab|$，$|a||b|$ の値をそれぞれ求めよ．

解

$|a+b| = |-2+3| = |1| = 1$ (答)

$|a-b| = |-2-3| = |-5| = 5$ (答)

$|ab| = |-2\cdot 3| = |-6| = 6$ (答)

$|a||b| = |-2||3| = 2\cdot 3 = 6$ (答)

←定義どおりに絶対値記号をはずす．

←【解説】参照．

【解説】一般に，実数 a，b に対して

$$|ab| = |a||b|$$

が成り立つ．これは直観的に明らかだろう．

5 平方根

重要ポイント　平方根の性質

① $a \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a} \geqq 0$

② $a \geqq 0$ のとき　$(\sqrt{a})^2 = a$

③ $\sqrt{a^2} = |a|$

④ $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

⑤ $a \geqq 0$，$b > 0$ のとき　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

⑥ $k \geqq 0$，$a \geqq 0$ のとき　$\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$

では，まず「分母の有理化」について確認しておこう．

例8 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ を簡単にせよ．

解

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} - \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{6}-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-2-\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2} \\
&= (\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2)-(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2) \\
&= 0 \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

← このように分母・分子に同じ数をかけて，分母を根号が含まれない形に直す．

次に，無理数を含んだ式の値を求める問題に挑戦してみよう．

例題 1

$x = \sqrt{6}+\sqrt{2}$，$y = \sqrt{6}-\sqrt{2}$ のとき，x^2+y^2，x^3+y^3 の値をそれぞれ求めよ．

着眼 x や y の値をそれぞれ求める式へ代入すると，計算が大変である．そこで，求める式を変形して，$x+y$，xy で表してから代入するのがうまい．

解答

$x+y = (\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$，

$xy = (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = (\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2 = 4$

← このあとの操作を見越して，まず，これらの値を求めておく．

であるから

$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = (2\sqrt{6})^2-2\cdot 4 = 16$　(答)

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\
&= (2\sqrt{6})^3-3\cdot 4\cdot 2\sqrt{6} = 24\sqrt{6} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

← 「解説」参照．

解説 x^2+y^2 や x^3+y^3 のように，x と y を入れ換えても式の値がもとの式と変わらない式を x，y の**対称式**という．とくに，$x+y$，xy を x，y の**基本対称式**という．「解答」では

“すべての x，y の対称式は，x，y の基本対称式で表される”

ということに着目し，与えられた式を $x+y$，xy で表したわけだ．

また，x^2-y^2，x^3-y^3 のように，x と y を入れ換えても式の値の絶対値は変わらず，符号のみが変わる式を**交代式**という．すべての x，y の交代式は $x+y$，xy，$x-y$ で表されることが知られている．

§ 2　1 次不等式

0 この単元のポイント

この単元では，これから学習する分野で，必ずと言ってもよいほど出てくる不等式について学習する．これができなければ，他の分野の問題を解くこともままならない場合があるので，この単元についても § 1 同様，完璧と言えるまでにマスターしてもらいたい．

1 1 次不等式

まずは，不等式の性質についてまとめておく．

重要ポイント　不等式の性質

① $a<b \Longrightarrow a+c<b+c$，$a-c<b-c$

② $a<b$ かつ $c<d \Longrightarrow a+c<b+d$

③ $a<b$ かつ $c>0 \Longrightarrow ac<bc$，$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

④ $a<b$ かつ $c<0 \Longrightarrow ac>bc$，$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

④のように，不等式の両辺に同じ負の数をかけたり，両辺を同じ負の数で割ったりすると

不等号の向きが変わる

ことに注意せよ．

例 1　$a<b$ のとき，$-2a+5$，$-2b+3$ の大小関係を不等号を用いて表せ．

解　$a<b$ の両辺に -2 をかけて

$$-2a>-2b$$

←不等式の性質④．

これと $5>3$ の辺々をたすと

$$-2a+5>-2b+3 \quad \text{(答)}$$

←不等式の性質②．

次に，連立不等式の解き方について，例 2 で復習しておこう．

例 2　連立不等式 $\begin{cases} 4x+3 \leqq -17 \\ 2x+2<3x+8 \end{cases}$ を解け．

解　$4x+3 \leqq -17$ において，3 を移項して

←連立不等式の第 1 式，第 2 式をそれぞれ解く方針．

$$4x \leqq -20$$

両辺を 4 で割って

$$x \leqq -5$$

$2x+2<3x+8$ において，$3x$ と 2 を移項して

$$-x<6$$

両辺に -1 をかけて

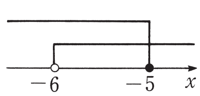
←不等号の向きが変わることに注意．

$$x>-6$$

これらを同時にみたす x の値の範囲は

←数直線を利用して考えるとよい．

$$-6<x \leqq -5 \quad \text{(答)}$$



例題2

次の各問に答えよ．

（1）次の不等式を解け．

（i）$2x-1<-3x+4<-x-2$

（ii）$|2x+3|<7$

（2）不等式 $10<3x+4<25$ をみたす自然数 x の個数を求めよ．

着眼　（1）（i）不等式 $A<B<C$ は $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ と読み替えることができるので，$2x-1<-3x+4$ と $-3x+4<-x-2$ の 2 つの不等式を同時にみたす x の値の範囲を求めればよい．

（ii）絶対値記号を含んだ不等式の問題である．不等式 $|X|<a$（a は正の定数）は

$$-a<X<a$$

と同値であることを利用すればよい．

（2）与えられた不等式を解くのが第一歩．この範囲に自然数がいくつあるか考えると….

解答　**（1）（i）** 与えられた式より

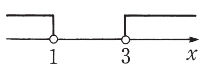
$$\begin{cases} 2x-1<-3x+4 & \cdots\cdots ① \\ -3x+4<-x-2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

← $A<B<C \iff \begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$

①，②のそれぞれにおいて

$$2x-1<-3x+4$$
$$\iff 5x<5$$
$$\therefore\ x<1$$
$$-3x+4<-x-2$$
$$\iff -2x<-6$$
$$\therefore\ x>3$$

であるから，これらを同時にみたす x の値は存在しないので



←数直線を利用するとよい．

解なし　（答）

（ii） $|2x+3|<7$ より

$$-7<2x+3<7$$

←「解説」参照．

$$\iff -10<2x<4$$

←各辺から 3 をひく．

$$\therefore\ -5<x<2 \quad （答）$$

←各辺を 2 で割る．

（2）

$$10<3x+4<25$$

$$\iff 6<3x<21$$

←各辺から 4 をひく．

$$\therefore\ 2<x<7$$

←各辺を 3 で割る．

よって，この不等式をみたす自然数 x の個数は

$6-2=$ 4（個）　（答）

←（7 未満の自然数の個数）－（2 以下の自然数の個数）

解説　（1）（ii）a を正の定数とするとき

① 不等式 $|X|>a$ は，$X<-a$ または $X>a$

② 不等式 $|X|<a$ は，$-a<X<a$

とそれぞれ同値である．これは，数直線をかくことで容易に導かれる．

§ 3　集合と論理

0　この単元のポイント

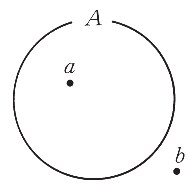
ここでは，集合や命題について復習していく．この分野は，単に数式だけではなく，中学で学習した証明のように言葉を使って結論を導くところでもあるので，用語の定義をしっかりと理解することが大切である．その上で，問題演習を積み重ねていこう．

1　集合とその要素の個数

ある条件をみたすものの集まりを**集合**といい，集合をつくっている１つ１つのものをその集合の**要素**という．集合の表し方には

- 集合の要素を書き並べて表す方法　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$
- 要素のみたす条件を示して表す方法　$A=\{n \mid n$ は 18 の正の約数$\}$

などがある．



また，a が集合 A の要素であるとき，**a は A に属する**といい

$$\boldsymbol{a \in A}\quad（または\ \boldsymbol{A \ni a}）$$

と表し，b が集合 A の要素でないとき，**b は A に属さない**といい

$$\boldsymbol{b \notin A}\quad（または\ \boldsymbol{A \not\ni b}）$$

と表す．そして，２つの集合 A，B があり，A のどの要素も B の要素であるとき，すなわち，任意の a に対して

$$a \in A\ ならば\ a \in B$$

が成り立つとき，**A は B に含まれる**，または，**B は A を含む**といい

$$\boldsymbol{A \subset B}\quad（または\ \boldsymbol{B \supset A}）$$

と表す（$\boldsymbol{A \subseteqq B}$　または　$\boldsymbol{B \supseteqq A}$　と書くこともある）．このとき，**A は B の部分集合**であるという．なお，A 自身も A の部分集合である．すなわち，$A \subset A$ である．

また，A の要素のうち B の要素ではないものが存在するとき，**A は B に含まれない**，または，**B は A を含まない**といい

$$\boldsymbol{A \not\subset B}\quad または\quad \boldsymbol{B \not\supset A}$$

と表す．

$A \subset B$ かつ $A \supset B$ のとき，**A と B は等しい**といい

$$\boldsymbol{A = B}$$

と表す．また，$A \not\subset B$ または $A \not\supset B$ のときは，**A と B は等しくない**といい

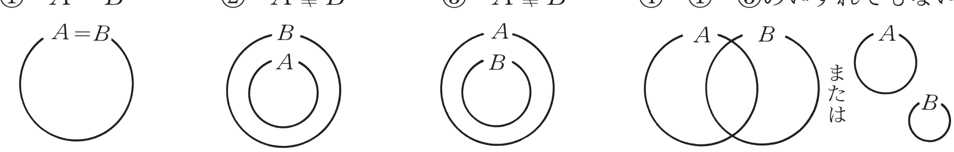
$$\boldsymbol{A \neq B}$$

と表す．とくに，$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき，**A は B の真部分集合**であるといい，$A \neq B$ を強調したい場合は，次のように表す．

$$\boldsymbol{A \subsetneqq B}\quad（または\ \boldsymbol{B \supsetneqq A}）$$

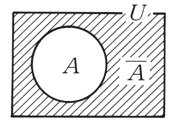
【補足】複数の集合があるとき，それぞれが他の集合に含まれるかどうかの関係のことを**包含関係**という．一般に，集合 A，B の間の包含関係は次のいずれかである．

①　$A=B$　　②　$A \subsetneqq B$　　③　$A \supsetneqq B$　　④　①〜③のいずれでもない．



また，上図のように，複数の集合の間の包含関係を表す図をベン図という．

考える対象のすべてを要素とする集合を**全体集合**という．また，要素を1つももたない集合を**空集合**といい，記号 ϕ で表す．そして，全体集合 U の部分集合 A に対して，U の要素のうち，A に属さないものの集合を **A の補集合**といい，$\overline{A}$ と表す．補集合の性質として，次のことが成り立つ．



重要ポイント

補集合の性質

① $\overline{A}$ の補集合は A である $(\overline{\overline{A}}=A)$．　② $\overline{U}=\phi$，$\overline{\phi}=U$

③ $A\subset B$ ならば，$\overline{A}\supset\overline{B}$

集合 A，B のどちらにも属する要素の集合を **A と B の共通部分（交わり）**といい

$$\boldsymbol{A\cap B}$$

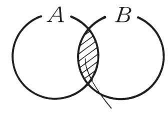
と表す．また，集合 A，B の少なくとも一方に属する要素の集合を **A と B の和集合（結び）**といい

$$\boldsymbol{A\cup B}$$

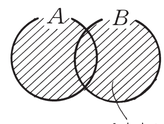
と表す．なお，全体集合 U の部分集合 A に対して

$$\boldsymbol{A\cap\overline{A}=\phi,\quad A\cup\overline{A}=U}$$

が成り立つ．そして，集合 A，B に対して，次の法則が成り立つ．



$A\cap B$



$A\cup B$

重要ポイント

ド・モルガンの法則

① $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　② $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

要素の個数が有限である集合を**有限集合**，要素の個数が無限にある集合を**無限集合**という．そして，有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表す．とくに，空集合 ϕ については，$n(\phi)=0$ である．集合の要素の個数については次のことも成り立つ．

重要ポイント

要素の個数

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(☆)$$
$$n(\overline{A})=n(U)-n(A)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(★)$$

【補足】ベン図を用いることで，次のことも確認しておこう．

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$$
$$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

例1　1から100までの自然数の中に，3でも5でも割り切れない数はいくつあるか．

解　1から100までの自然数の集合を U，U の要素のうち，3の倍数，5の倍数であるものの集合をそれぞれ A，B とすると，求める個数は，$n(\overline{A}\cap\overline{B})$ である．ここで，$A\cap B$ は15の倍数の集合であるから

← 各集合に名前をつけておくと，説明がしやすい．

← 3と5の最小公倍数は15．

$$100=3\times33+1,\quad 100=5\times20,\quad 100=15\times6+10$$
$$\therefore\quad n(A)=33,\quad n(B)=20,\quad n(A\cap B)=6$$

よって，求める個数は

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$$
$$=100-(33+20-6)=53\text{（個）}\qquad\text{（答）}$$

← ド・モルガンの法則と，「重要ポイント」の(★)．

← 「重要ポイント」の(☆)．

2 命題と集合

1つの主張で，それが**真**であるか**偽**であるか(正しいか正しくないか)を決められるものを**命題**という．たとえば，「-2 は整数である」は真の命題で，「-2 は自然数である」は偽の命題である．また，「私はかわいい」などは，かわいさの基準が定まっていないので命題とはいわない．命題は，条件 p，q を用いて

p ならば q である　($p \Longrightarrow q$)

の形で述べられることが多い．このとき，p をこの命題の**仮定**，q を**結論**という．なお，命題「$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$」が真であるとき，p と q は**同値**であるといい

$$p \Longleftrightarrow q$$

と表す．また，条件 p をみたすものの集合を p の**真理集合**といい，条件 p，q の真理集合をそれぞれ P，Q とすると，命題「$p \Longrightarrow q$」が真であることは $P \subset Q$ が成り立つことと同じである．

一方，命題「p ならば q である」が偽であるとき，P の要素で，結論 q をみたさないものを，この命題の**反例**という．一般に，命題が偽であることを示すには，反例を1つ挙げればよい．

条件 p に対して，「p でない」を p の否定といい，$\overline{p}$ で表す．このとき，次のことが成り立つ．

重要ポイント　条件の否定

① $\overline{\overline{p}} = p$

② $\begin{cases} \overline{p \text{ または } q} \Longleftrightarrow \overline{p} \text{ かつ } \overline{q} \\ \overline{p \text{ かつ } q} \Longleftrightarrow \overline{p} \text{ または } \overline{q} \end{cases}$

③ 「ある a に対して p である」の否定は「すべての a に対して p ではない」

④ 「すべての a に対して p である」の否定は「ある a に対して p ではない」

【補足】数学で用いる“または”は，日常で用いる“または”とは少々ニュアンスが違う．これは

日常の“p または q”…どちらか一方のみ成り立つ場合

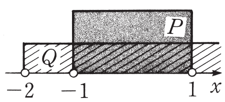
であるが，数学で用いる“p または q”は，上の場合に加え「p が成り立ち，q も成り立つ(両方成り立つ)場合」も含むと考えるのである．考え違いをしている人が多いので，きちんと理解しておくこと．

例2　次の命題の真偽を調べよ．

(1) $-1 < x < 1 \Longrightarrow x > -2$　　(2) $x^2 = 3 \Longrightarrow x = \sqrt{3}$

解 (1) 条件 $-1 < x < 1$，$x > -2$ の真理集合を P，Q とすると，$P \subset Q$ であるから

真　(答)



←条件が不等式で表される場合は，数直線をかいて考えるとわかりやすい．

(2) 方程式 $x^2 = 3$ を解くと

$x = \pm\sqrt{3}$

であるから，$x = -\sqrt{3}$ は $x^2 = 3$ をみたすが，$x = \sqrt{3}$ をみたさない．したがって

偽　(答)

←反例を挙げる．

例3　次の条件の否定を書け．

(1) $x = 1$ または $y = 1$　　(2) $2 < x < 3$

解 (1)「$x \neq 1$ かつ $y \neq 1$」　(答)　←条件の否定②．

(2)「$2 < x < 3$」は「$2 < x$ かつ $x < 3$」であるから　←これがポイント．

「$x \leqq 2$ または $x \geqq 3$」　(答)　←条件の否定②．

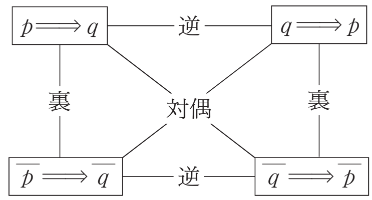
命題

「$p \Longrightarrow q$」 ……………………………………(＊)

に対して

「$q \Longrightarrow p$」，「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」，「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

をそれぞれ命題(＊)の逆，裏，対偶という．命題と逆・裏・対偶の関係は右図のようになる．また，次の性質が成り立つ．



重要ポイント　逆・裏・対偶の真偽

① もとの命題が真でも，その逆が真とは限らない．
② 命題「$p \Longrightarrow q$」の真偽と，その対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」の真偽は一致する．

【補足】②より，ある命題の真偽が調べにくいときは，その対偶の真偽を調べればよいことになる．
また，逆の対偶は裏であることから

逆の真偽と裏の真偽は一致する

ともいえる．これも押さえておこう．

例4 命題「$x=y$ ならば $x^2=y^2$」の逆，裏，対偶をそれぞれ書け．

解 逆：「$x^2=y^2$ ならば $x=y$」　← $q \Longrightarrow p$
裏：「$x \neq y$ ならば $x^2 \neq y^2$」　(答)　← $\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$
対偶：「$x^2 \neq y^2$ ならば $x \neq y$」　← $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$

例5 命題「$x+y>3$ ならば $x>1$ または $y>2$」の真偽を調べよ．

解 この命題の対偶は

← 命題の対偶の真偽を調べる方針．

$x \leqq 1$ かつ $y \leqq 2$ ならば $x+y \leqq 3$ ………………①

である．これは $x \leqq 1$ かつ $y \leqq 2$ のとき，これらの辺々をたすと

$x+y \leqq 3$

← 不等式の性質を思い出そう．

であるから，真である．よって，①が真であるから，もとの命題も真である．　(答)

背理法についても復習しておこう．ある命題 $A: p \Longrightarrow q$ が真であることを示すために，まずその命題が偽である，すなわち，“p であるにもかかわらず $\overline{q}$ である”と仮定して矛盾を導き，それによってAが真であることを示す証明法を**背理法**というのであった．
では，次の 例6 で確認してみよう．

例6 $\sqrt{15}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ．

解 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が無理数でないと仮定すると，a を有理数として

← $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が無理数であることを背理法で示すための仮定．

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}=a$$

とおくことができる．両辺を 2 乗して

← $\sqrt{15}$ が現れる工夫．

$$3+2\sqrt{15}+5=a^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{15}=\frac{a^2-8}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，a は有理数であるから，①の右辺は有理数である．一方，$\sqrt{15}$ は無理数であるから，これに矛盾する．

← このような矛盾が導かれたのは，$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が無理数でないと仮定したからである．

したがって，$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ は無理数である．　(証終)

3 必要条件・十分条件

命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき

p は q の**十分条件**である，q は p の**必要条件**である

という．そして，命題 $p \Longrightarrow q$ が真で，かつ $q \Longrightarrow p$ も真のとき

p は q の**必要十分条件**である（q は p の必要十分条件である）

といい，$p \Longleftrightarrow q$ と表す．なお，必要条件・十分条件を判定する問題はよく出題されるが，これを苦手とする人は多いのではないだろうか？ そこで，以下の判定法を利用するとよいだろう．

重要ポイント　必要条件・十分条件の判定法

p は q であるための何条件か？

という問題では，まず

$p \quad \boxed{} \quad q$

とし，$\boxed{}$ の中に $\Longrightarrow$ または $\Longleftarrow$ を入れることを考える．

$\Longrightarrow$ が入ると真になるならば「十分条件」

$\Longleftarrow$ が入ると真になるならば「必要条件」

といえる．さらに

$\Longrightarrow$，$\Longleftarrow$ どちらが入っても真になるならば「必要十分条件」

といえる．

【補足】「必要条件だが十分条件ではない」ことを略して「必要条件である」ということもある．同様に，「十分条件だが必要条件ではない」ことを略して「十分条件である」ということもある．

例題3

$x^2+x-2=0$ は $x=1$ であるための $\boxed{}$

の $\boxed{}$ に適するものを，下のア，イ，ウ，エの中から 1 つ選べ．

ア　必要条件だが十分条件ではない　　イ　十分条件だが必要条件ではない

ウ　必要十分条件である　　エ　必要条件でも十分条件でもない

着眼 必要条件，十分条件の判定について理解できているか試してもらう．ここでは

$x^2+x-2=0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-1)=0$

より，$x=-2$ または $x=1$ に直して考えるのがコツ．

解答 $x^2+x-2=0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-1)=0$

←左辺を因数分解した．

であるから，$x^2+x-2=0$ は

$x=-2$ または $x=1$

と同値である．したがって

「$x=-2$ または $x=1$」ならば $x=1$

は，$x=-2$ のとき成り立たないので偽である．

← $x=-2$ が「反例」ということ．

また

$x=1$ ならば「$x=-2$ または $x=1$」

は明らかに真である．

以上より，$x^2+x-2=0$ は $x=1$ であるための必要条件だが十分条件ではない．よって

← $x=-2$ または $x=1$ $\overset{\times}{\rightleftarrows}$ $x=1$

ア　（答）

添削問題

数と式

ZMC2A1-Z1A1-01

1

次の各問いに答えよ。（配点　25）

(1)　次の式を展開せよ。

(i)　$(x-3y)^2(x+3y)^2$　(4 点)

(ii)　$(x+6)(x+7)(x-3)(x-4)$　(6 点)

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$(x-2)^2+3(x-2)-4$　(4 点)

(ii)　$x^4-10x^3+25x^2-36$　(5 点)

(iii)　$2x^2+3y^2+7xy-5x-10y+3$　(6 点)

添削問題解答解説

数と式

ZMC2A1-Z1C1-01

1 問題

次の各問いに答えよ。　(配点　25)

(1)　次の式を展開せよ。

(i)　$(x-3y)^2(x+3y)^2$　(4 点)

(ii)　$(x+6)(x+7)(x-3)(x-4)$　(6 点)

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$(x-2)^2+3(x-2)-4$　(4 点)

(ii)　$x^4-10x^3+25x^2-36$　(5 点)

(iii)　$2x^2+3y^2+7xy-5x-10y+3$　(6 点)

着眼

(1)　与えられた式を展開する問題。本問の一番のポイントは，因数どうしをかけ合わせる際に

“いかにして項の数が多くならないようにするか”

である。積の順序を変えたり，因数分解したりして考えるのがうまい。

(i)　$(x-3y)^2$ と $(x+3y)^2$ をそれぞれ展開してからかけ合わせてもよいが，面倒である。そこで

$$A^2B^2=(AB)^2$$

であることを利用すると…。

(ii)　これも順に展開していくのではなく，うまい計算の仕方がないか考えてみよう。積の順序を変え，$(x+6)(x-3)$ と $(x+7)(x-4)$ を先に計算すると，どちらにも x^2+3x があるので…。

(2)　因数分解の問題。“置き換え”や“何に着目して因数分解するか”がポイントである。

(i)　与えられた式を展開してから因数分解することもできるが

$$X=x-2$$

とおき，X の 2 次式を因数分解すると，処理量が少なくて済む。

(ii)　因数分解する式をどのように見るかが最大のポイント。係数に着目すると，因数分解する式

$$\underline{x^4-10x^3+25x^2}-36$$

の〰の部分は $(\quad)^2$ の形に因数分解できそうである。そして，36 は 6^2 であるから…。

(iii)　2 つ以上の文字を含む式の因数分解は

“最も次数の低い文字について整理して考える”

のが定石である。本問では，x，y についての次数はともに 2 だから，どちらの文字について整理してもよい。

解答

(1)(i)

$$\begin{aligned}(x-3y)^2(x+3y)^2&=\{(x-3y)(x+3y)\}^2\\&=(x^2-9y^2)^2\\&=\boldsymbol{x^4-18x^2y^2+81y^4}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$

(ii) $(x+6)(x+7)(x-3)(x-4)$

$=\{(x+6)(x-3)\}\{(x+7)(x-4)\}$

$=\{(x^2+3x)-18\}\{(x^2+3x)-28\}$

◀このように積の順序を変えるのがポイント。

$A=x^2+3x$ とすると，与えられた式は

$A^2+(-18-28)A+(-18)\cdot(-28)$

$=A^2-46A+504$

ここで，Aをもとに戻すと

$(x^2+3x)^2-46(x^2+3x)+504$

$=x^4+6x^3+9x^2-46x^2-138x+504$

$=\boldsymbol{x^4+6x^3-37x^2-138x+504}$　**(答)**

(2)(i) $X=x-2$ とすると，与えられた式は

$(x-2)^2+3(x-2)-4=X^2+3X-4=(X+4)(X-1)$

◀このように置き換えるとわかりやすい。

ここで，X をもとに戻すと

$(X+4)(X-1)=\boldsymbol{(x+2)(x-3)}$　**(答)**

(ii) $x^4-10x^3+25x^2-36=x^2(x^2-10x+25)-36$

$=x^2(x-5)^2-36$

$=\{x(x-5)+6\}\{x(x-5)-6\}$

$=(x^2-5x+6)(x^2-5x-6)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x-3)(x-6)(x+1)}$　**(答)**

◀「**着眼**」のように見ると，A^2-B^2 の形に直せる。これがポイント。

◀これを答にしないこと！これ以上因数分解できないところまで因数分解する。

(iii) $2x^2+3y^2+7xy-5x-10y+3$

$=2x^2+(7y-5)x+3y^2-10y+3$

$=2x^2+(7y-5)x+(3y-1)(y-3)$

$=\boldsymbol{(2x+y-3)(x+3y-1)}$　**(答)**

◀x について整理する。

◀
$$\begin{array}{cccl} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y-3 & \to\ \ y-3 \\ 1 & & 3y-1 & \to\ \ \underline{6y-2\ (+} \\ & & & \ \ \ 7y-5 \end{array}$$

解説

A　(1)(i) 別解 展開の工夫の仕方

「**解答**」よりやや大変になるが，次のように工夫して展開してもよいだろう。

$(\text{与式})=(\underset{\sim\sim\sim}{x^2+9y^2}-\underline{\underline{6xy}})(\underset{\sim\sim\sim}{x^2+9y^2}+\underline{\underline{6xy}})=(\underset{\sim\sim\sim}{x^2+9y^2})^2-(\underline{\underline{6xy}})^2$

$=x^4+18x^2y^2+81y^4-36x^2y^2$

$=x^4-18x^2y^2+81y^4$　(答)

B　(2)(iii) 別解 係数を比較して…

与えられた式が

$(x,\ y$ の 1 次式$)(x,\ y$ の 1 次式$)$

の形に因数分解できることを見越すと，次のようにして因数分解することもできる。

$2x^2+3y^2+7xy-5x-10y+3$

$=(2x+y)(x+3y)-5x-10y+3$ ……………………………………………①

これが

$(2x+y+A)(x+3y+B)$　(A，B は定数) ……………………………②

と変形できる条件は，①，②において x の係数，y の係数，定数項をそれぞれ比較して

$-5=2B+A$，$-10=B+3A$，$3=AB$ ………………………………③

である。③を A，B の連立方程式とみて解くと $A=-3$，$B=-1$ となるので，与式は

$(2x+y-3)(x+3y-1)$　(答)

と因数分解できる。