入試数学を知る　2回目
添削問題

QMT5V3-T1A2-01

※ここからは『Z Study　解答用紙編』の数学「入試数学を知る」2枚目にご記入ください。

2　次の各問いに答えよ。（配点　50）

(1)　$x>0$，$y>0$，$x+2y=1$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ のとり得る値の最小値と，そのときの x，y の値をそれぞれ求めよ。（20点）

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\dfrac{a^2+4}{b}+\dfrac{b^2+4}{a}\geqq 8$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。（30点）

2　次の各問いに答えよ。（配点　50）

(1)　$x>0$，$y>0$，$x+2y=1$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ のとり得る値の最小値と，そのときの x，y の値をそれぞれ求めよ。（20点）

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\dfrac{a^2+4}{b}+\dfrac{b^2+4}{a}\geqq 8$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。（30点）

攻略点

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ を通分するのが第一歩。条件より，x と $2y$ の相加平均がわかっているので，これらの相乗平均についての条件を導く方針で考えてみると…。

(2)　左辺を4つの分数に分解し，2つずつを組み合わせると…。ただし，相加・相乗平均の関係を複数回用いることになるので，それを同時に成り立たせる a，b の値が存在するかどうかに注意すること。

解　答

(1)　与えられた式を変形すると

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=\frac{x+2y}{2xy}=\frac{1}{2xy}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$x>0$，$y>0$ のとき

$$x>0,\ 2y>0$$

だから，相加・相乗平均の関係より

$$x+2y\geqq 2\sqrt{x\cdot 2y}\qquad \therefore\quad 1\geqq 2\sqrt{2xy}$$

両辺を2乗すると

$$1\geqq 8xy\qquad \therefore\quad \frac{1}{2xy}\geqq 4$$

これと①を合わせると

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}\geqq 4$$

　そして，等号が成り立つのは

$$x=2y$$

より

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{4}$$

のときである。

　以上より，求める最小値と，そのときの x，y の値は

◀必ず確認するようにすること。

◀最小となるときの x，y の値を求めるために，等号成立条件を求める。

最小値：4 $\left(\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4}}\ \text{のとき}\right)$ **（答）**

(2) $(\text{左辺})=\dfrac{a^2+4}{b}+\dfrac{b^2+4}{a}=\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{4}{a}$

ここで，$\dfrac{a^2}{b}$，$\dfrac{b^2}{a}$，$\dfrac{4}{b}$，$\dfrac{4}{a}$ は正だから，相加・相乗平均の関係より

◀相加・相乗平均の関係を利用する際の前提条件の確認。

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^2}{a}}=2\sqrt{ab}\quad\cdots\cdots②$$

$$\frac{4}{b}+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{4}{b}\cdot\frac{4}{a}}=\frac{8}{\sqrt{ab}}\quad\cdots\cdots③$$

であり，②の等号が成り立つのは

$$\frac{a^2}{b}=\frac{b^2}{a}\iff a^3=b^3\qquad\therefore\quad a=b$$

◀厳密に示したければ
$a^3-b^3=0$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$
であり，$a^2+ab+b^2>0$ より
$a-b=0$
とすればよい。

③の等号が成り立つのは

$$\frac{4}{b}=\frac{4}{a}\iff a=b$$

よって，②，③の等号成立条件が一致するので

◀ここがポイント。②，③の等号が同時に成り立つ場合がなければ，④の等号は成り立たない。

$$(\text{左辺})\geqq 2\sqrt{ab}+\frac{8}{\sqrt{ab}}\quad\cdots\cdots④$$

ここで，$2\sqrt{ab}$，$\dfrac{8}{\sqrt{ab}}$ は正だから，相加・相乗平均の関係より

◀前提条件の確認。

$$2\sqrt{ab}+\frac{8}{\sqrt{ab}}\geqq 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot\frac{8}{\sqrt{ab}}}=2\cdot 4=8\quad\cdots\cdots⑤$$

であり，⑤の等号が成り立つのは

$$2\sqrt{ab}=\frac{8}{\sqrt{ab}}\iff ab=4$$

②，③，⑤の等号が同時に成り立つためには

$a=b$ かつ $ab=4$

であり，このとき

$a^2=4\qquad\therefore\quad a=2\ (>0)$

また

$b=2$

よって，②，③，⑤の等号を同時に成り立たせる a，b の値は存在するので，④，⑤より

◀やはり，ここがポイントとなる。

$$\frac{a^2+4}{b}+\frac{b^2+4}{a}\geqq 8\qquad\text{（証明終）}$$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a=b=2}$ **のとき**である。　**（答）**