入試数学を知る　1 回目
添削問題

QMT5V3-S1A1-01

※ここからは『Z Study　解答用紙編』の数学「入試数学を知る」1 枚目にご記入ください。

1　次の各問いに答えよ。(配点　50)

(1)　$x+y=1$ のとき，次の等式を証明せよ。(15 点)

$$x^3+y^3+x^2+y^2=2-5xy$$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。(15 点)

$$\frac{ad+bc}{ab+cd}=\frac{ac}{a^2+c^2}+\frac{bd}{b^2+d^2}$$

(3)　$a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。(20 点)

$$3(a+1)\geqq 2\sqrt{2a^2+5a+2}$$

入試数学を知る　1回目
添削問題 解答解説

QMT5V3-S1C1-01

1　次の各問いに答えよ。(配点　50)

(1)　$x+y=1$ のとき，次の等式を証明せよ。(15点)

$$x^3+y^3+x^2+y^2=2-5xy$$

(2)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。(15点)

$$\frac{ad+bc}{ab+cd}=\frac{ac}{a^2+c^2}+\frac{bd}{b^2+d^2}$$

(3)　$a>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか調べよ。(20点)

$$3(a+1)\geqq 2\sqrt{2a^2+5a+2}$$

攻略点

(1)　本問では，条件式が与えられているので，これを利用して1文字を消去する。

(2)　条件式が比例式の形で与えられているので，これを k などとおいて処理するのが定石である。

(3)　$a>0$ のとき，証明すべき不等式の両辺は正であることに着目して，両辺を各々2乗したものを証明する方針で考えてみよう。

解　答

(1)　与えられた条件より

$$y=1-x$$

を左辺と右辺にそれぞれ代入すると

◀ y を消去する。

(左辺)

$$\begin{aligned}&=x^3+y^3+x^2+y^2\\&=x^3+(1-x)^3+x^2+(1-x)^2\\&=x^3+(1-3x+3x^2-x^3)+x^2+(1-2x+x^2)\\&=5x^2-5x+2\end{aligned}$$

(右辺)

$$\begin{aligned}&=2-5xy\\&=2-5x(1-x)\\&=5x^2-5x+2\end{aligned}$$

したがって，(左辺)＝(右辺)が成り立つ。　(証明終)

(2)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$$

とおくと

◀ このようにおいて，a と c を消去する方針で処理する。

$$a=bk,\quad c=dk$$

となるから，これらを左辺と右辺にそれぞれ代入すると

$$(\text{左辺})=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

$$=\frac{(bk)d+b(dk)}{(bk)b+(dk)d}$$

$$=\frac{2bdk}{(b^2+d^2)k}$$

$$=\frac{2bd}{b^2+d^2}$$

$$(\text{右辺})=\frac{ac}{a^2+c^2}+\frac{bd}{b^2+d^2}$$

$$=\frac{(bk)(dk)}{(bk)^2+(dk)^2}+\frac{bd}{b^2+d^2}$$

$$=\frac{bdk^2}{(b^2+d^2)k^2}+\frac{bd}{b^2+d^2}$$

$$=\frac{bd}{b^2+d^2}+\frac{bd}{b^2+d^2}$$

$$=\frac{2bd}{b^2+d^2}$$

したがって，(左辺)＝(右辺)が成り立つ。　(証明終)

(3)　$a>0$ のとき

$$(a+1)>0,\ 2\sqrt{2a^2+5a+2}>0$$

であるから

$$\{3(a+1)\}^2 \geqq (2\sqrt{2a^2+5a+2})^2$$

を示せばよい。

$$\{3(a+1)\}^2-(2\sqrt{2a^2+5a+2})^2$$
$$=9(a+1)^2-4(2a^2+5a+2)$$
$$=9(a^2+2a+1)-(8a^2+20a+8)$$
$$=a^2-2a+1$$
$$=(a-1)^2 \geqq 0$$

◀ (実数)$^2\geqq 0$ を利用する。

よって

$$\{3(a+1)\}^2 \geqq (2\sqrt{2a^2+5a+2})^2$$

$$\therefore\quad 3(a+1) \geqq 2\sqrt{2a^2+5a+2}$$　(証明終)

また，等号が成り立つのは

◀ これを調べるのを忘れないようにすること。

$$a-1=0$$

が成り立つときであるから

$a=1$ のとき　(答)