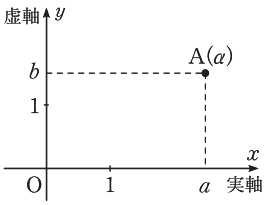
複素数平面１：ポイント整理

PM2YA1-Z1J1-01
学習時間のめやす 45分

実数は数直線上の点として表すことができた．これと同様に，複素数を平面上の点として表すことができる．この章では，複素数を平面上の点として表したとき，2 つの複素数の四則演算が平面上でどのような意味をもつかを考えていく．

1．複素数平面

＜1－1　複素数平面＞



複素数 $\alpha=a+bi$ (a，b は実数) と xy 平面上の点 $(a,\ b)$ を対応させる．このとき，すべての複素数は xy 平面上の点と 1 つずつもれなく対応する．

このように，各点 $(a,\ b)$ が複素数 $\alpha=a+bi$ を表している平面を**複素数平面**といい，x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**という．

複素数平面上で，複素数 α を表す点 A を $\mathrm{A}(\alpha)$ と表す．また，単に**点 α** ということもある．実軸上の点は実数を表しており，虚軸上の原点 O と異なる点は純虚数を表している．

＜1－2　共役な複素数＞

複素数 $\alpha=a+bi$ (a，b は実数) に対して，$a-bi$ を α の**共役な複素数**といい，$\overline{\alpha}$ で表す．

このとき

$$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

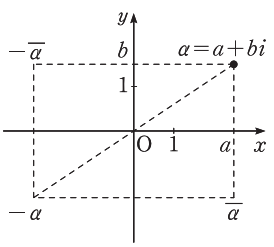
となり，$\alpha\overline{\alpha}$ は実数になることがわかる．

なお，複素数 α，β に対して，次が成り立つことも押さえておこう．

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\quad \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta},\quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}},\quad \overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$$

$$\alpha \text{ は実数} \iff \overline{\alpha}=\alpha$$

$$\alpha \text{ は純虚数または } 0 \iff \overline{\alpha}=-\alpha$$



複素数 $\alpha=a+bi$ と共役な複素数 $\overline{\alpha}=a-bi$ は，実部が等しく，虚部が異符号であるから

点 α と点 $\overline{\alpha}$ は実軸に関して対称

である．これは xy 平面上の点 $(a,\ b)$ と点 $(a,\ -b)$ の位置関係とみればよい．同じようにして

$$-\alpha=-(a+bi)=-a-bi$$

$$-\overline{\alpha}=-(a-bi)=-a+bi$$

であるから

点 α と点 $-\alpha$ は原点に関して対称

点 α と点 $-\overline{\alpha}$ は虚軸に関して対称

重要ポイント1　共役な複素数の対称性

複素数 α とその共役な複素数 $\overline{\alpha}$ について

点 α と点 $\overline{\alpha}$ は実軸に関して対称

点 α と点 $-\alpha$ は原点に関して対称

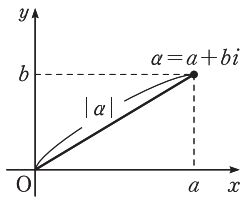
点 α と点 $-\overline{\alpha}$ は虚軸に関して対称

＜1－3　複素数の絶対値＞

点αと原点Oとの距離を複素数αの**絶対値**といい，$|\alpha|$で表す．したがって，$\alpha=a+bi$（a，bは実数）のとき

$$|\alpha|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

である．



絶対値$|\alpha|$は負でない実数であり

$$|\alpha|=0 \iff a^2+b^2=0 \iff a=b=0 \iff \alpha=0$$

また，$b=0$のとき，すなわち，αが実数aのとき

$$|\alpha|=\sqrt{a^2}=|a|$$

重要ポイント2　複素数の絶対値

α，βを複素数とすると，次の性質が成り立つ．

（i）$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$

（ii）$|\overline{\alpha}|=|-\alpha|=|\alpha|$

（iii）$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

（iv）$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$　$(\beta\neq 0)$

上の性質の証明をしておこう．

（i）$\alpha=a+bi$（a，bは実数）とすると，$\overline{\alpha}=a-bi$であるから

$$\alpha\overline{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=|\alpha|^2$$

（ii）$\alpha=a+bi$（a，bは実数）とすると

$$|\overline{\alpha}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|\alpha|$$

$$|-\alpha|=|-a-bi|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|\alpha|$$

（iii）　$|\alpha\beta|=\sqrt{\alpha\beta\cdot\overline{\alpha\beta}}=\sqrt{\alpha\beta\cdot\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}=\sqrt{(\alpha\overline{\alpha})(\beta\overline{\beta})}=\sqrt{|\alpha|^2|\beta|^2}=|\alpha||\beta|$

（iv）（iii）を利用すると

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right||\beta|=\left|\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\right|=|\alpha| \qquad \therefore\ \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

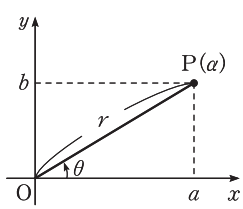
＜1－4　極形式＞

複素数平面上の0でない複素数$\alpha=a+bi$（a，bは実数）を表す点をPとする．このとき，右図のように，OPの長さをr，OPが実軸（x軸）の正方向となす角をθとすると

$$r=|\alpha|,\ a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta$$

である．したがって，複素数αは

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$



と表すことができる．これを複素数αの**極形式**といい，rはαの絶対値になっている．また，θをαの**偏角**という．αの偏角は記号**arg** αで表す（arg は argument の略である）．普通，偏角θは$0\leqq\theta<2\pi$もしくは$-\pi<\theta\leqq\pi$で考えるが，θは動径OPと実軸の正の部分とのなす角であるから一般角で考えることもある．すなわち，αの偏角の1つをθとすると

$$\arg\alpha=\theta+2n\pi \quad (n\text{は整数})$$

と表すこともできる．もちろんθを$0\leqq\theta<2\pi$もしくは$-\pi<\theta\leqq\pi$の範囲に限れば，θはただ1通りに決まる．

なお，$\alpha=0$のときは，$r=|\alpha|=0$であるが，偏角は定義されない．

重要ポイント3　複素数の極形式

複素数 $\alpha = a+bi$ $(\alpha \neq 0)$ の極形式は

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ただし

$$r = |\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\theta = \arg\alpha$$

2. 複素数の演算の図形的意味

＜2－1　実数倍・加法・減法＞

k を実数，$\alpha = a+bi$（a，b は実数）を 0 でない複素数とすると

$$k\alpha = k(a+bi) = ka+kbi$$

であるから，点 $\mathrm{P}(k\alpha)$ は 2 点 O，$\mathrm{A}(\alpha)$ を通る直線上で

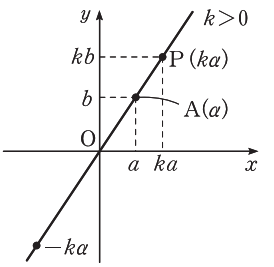
$k>0$ のとき，原点 O に関して点 A と同じ側

$k<0$ のとき，原点 O に関して点 A と反対側

にあり

点 P と原点 O との距離は $|k\alpha| = |k||\alpha|$

である．



重要ポイント4　原点を含む 3 点が一直線上に存在する条件

α，β を複素数とし，$\alpha \neq 0$ とする．

3 点 0，α，β が一直線上にある

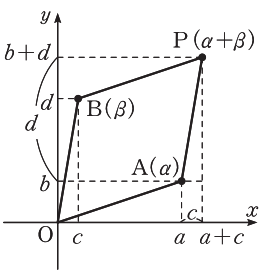
$\Longleftrightarrow$ $\beta = k\alpha$　（k は実数）

2 つの複素数 $\alpha = a+bi$，$\beta = c+di$（a，b，c，d は実数）の和は

$$\alpha+\beta = (a+bi)+(c+di)$$
$$= (a+c)+(b+d)i$$

であり，β を加えるということの図形的意味は，実軸方向に c，虚軸方向に d だけ平行移動することを意味する．この平行移動を**複素数 β だけの平行移動**という．

したがって，3 点 O，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ が一直線上にないときは，点 $\mathrm{P}(\alpha+\beta)$ は線分 OA，OB を 2 辺とする平行 4 辺形の頂点となる．



重要ポイント5　2 つの複素数の和と平行移動

2 点 α，β に対して，点 $\alpha+\beta$ は

点 α を β だけ平行移動した点

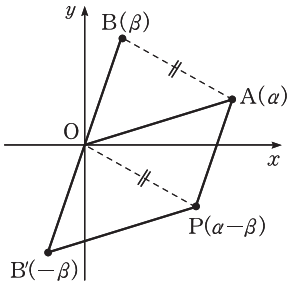
を表す．

また，3 点 0，α，β が一直線上にないとき，4 点 0，α，$\alpha+\beta$，β はこの順に平行 4 辺形をつくる．

次に，2つの複素数 α，β の差について考える．

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

であり，3点O，A(α)，B(β)が一直線上にないとき，$-\beta$ の表す点をB′とすると，点P($\alpha-\beta$)は線分OA，OB′を2辺とする平行4辺形の頂点と考えられる．



また，B(β)とB′($-\beta$)は原点Oに関して対称であるから，4点O，P($\alpha-\beta$)，A(α)，B(β)もこの順に平行4辺形をつくる．平行4辺形について対辺の長さは等しいから，2点A(α)，B(β)の距離は原点Oと点P($\alpha-\beta$)の距離に等しい．すなわち，$|\alpha-\beta|$である．

重要ポイント6　複素数平面上の2点間の距離

複素数平面上の2点 α，β 間の距離は

$$|\alpha-\beta|$$

＜2－2　乗法・除法＞

複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$（a，b，c，d は実数）の積は

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

であった．

これを極形式で表すと積の図形的な意味が見えてくる．いま

$$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad \beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

とおくと

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+ir_1r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\end{aligned}$$

ここで，3角関数の加法定理

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$$

を用いると，$\alpha\beta$ の極形式は

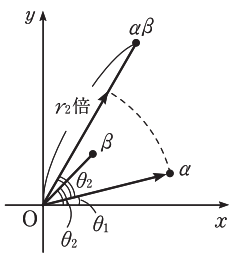
$$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

となる．これより，$\alpha\beta$ を複素数平面上に図示するには

点 α を原点Oを中心に θ_2 だけ回転し

原点Oを中心に r_2 倍した点

をかけばよい．



したがって，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ を α にかけるということは

$r_2>1$ のときは，点 α に回転拡大を施す

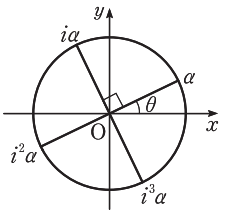
$0<r_2<1$ のときは，点 α に回転縮小を施す

$r_2=1$ のときは，点 α に回転を施す

ことである．

とくに，$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ なので，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると

$$i\alpha=i\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=r\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$



であり，i をかけるということは点 α を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転することである．

重要ポイント7　2つの複素数の積

α，β を 0 でない複素数とする．$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

（i）$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$|\alpha\beta|=r_1r_2=|\alpha||\beta|$

$\arg(\alpha\beta)=\theta_1+\theta_2=\arg\alpha+\arg\beta$

（ii）2 点 α，β に対して，点 $\alpha\beta$ は点 α を原点 O を中心に $\arg\beta$ だけ回転し，さらに，原点 O を中心に $|\beta|$ 倍した点である．

複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ の商は，$\beta\neq0$ のとき

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

であった．これを極形式で表してみよう．いま

$$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad \beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

とおくと

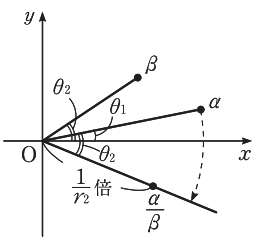
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot r_2(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}{r_2^{\,2}}+i\frac{r_1r_2(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{r_2^{\,2}}$$

ここで，3 角関数の加法定理

$$\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$\sin(\theta_1-\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2$$

を用いると

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1r_2}{r_2^{\,2}}\cos(\theta_1-\theta_2)+i\frac{r_1r_2}{r_2^{\,2}}\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$



となる．

これを複素数平面上に図示するには

点 α を原点 O を中心に $-\theta_2$ だけ回転し

原点 O を中心に $\frac{1}{r_2}$ 倍した点

をかけばよい．

重要ポイント8　2つの複素数の商

α，β を 0 でない複素数とする．$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

（i）$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\theta_1-\theta_2=\arg\alpha-\arg\beta$

（ii）2 点 α，β に対して，点 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ は点 α を原点 O を中心に $-\arg\beta$ だけ回転し，さらに，原点 O を中心に $\dfrac{1}{|\beta|}$ 倍した点である．

（例 1）点 $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点 z_1 を求める．

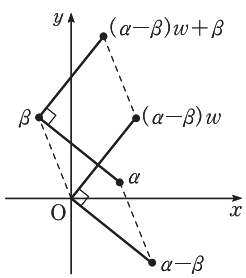
$$w=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

とすると，求める点 z_1 は

$$\begin{aligned}z_1&=\alpha w\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)i\\&=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

（例 2）点 $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ を点 $\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$ を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点 z_2 を求める．

まずは，点 β が原点 O と一致するように平行移動する．この平行移動を点 α にも施すと



$$\begin{aligned}\alpha-\beta&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)\\&=\sqrt{3}-i\end{aligned}$$

にうつる．この点を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点は

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)w&=(\sqrt{3}-i)i\\&=1+\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

であり，この点に原点 O が点 β と一致するような平行移動を施すと，点 z_2 と一致するので

$$\begin{aligned}z_2&=(\alpha-\beta)w+\beta\\&=(1+\sqrt{3}\,i)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)\\&=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{3+2\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

このように，平行移動をうまく使うことによって，原点以外の点を中心とする回転を考えることができる．

また，同じ考え方で，原点以外の点を中心とする回転拡大(縮小)も考えることができる．

重要ポイント9 **原点以外の点における回転**

複素数平面上で，点 α を点 β を中心に角度 θ だけ回転した点を z_1 とすると

$$z_1=(\cos\theta+i\sin\theta)(\alpha-\beta)+\beta$$

また，点 α を点 β を中心に角度 θ だけ回転し，さらに点 β を中心に r 倍拡大した点を z_2 とすると

$$z_2=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\alpha-\beta)+\beta$$

3. ド・モアブルの定理

＜3－1　ド・モアブルの定理＞

絶対値1，偏角 θ の複素数

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

を考える．z の積をつくっていくと

$$z^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)$$
$$=\cos2\theta+i\sin2\theta$$
$$z^3=(\cos2\theta+i\sin2\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(2\theta+\theta)+i\sin(2\theta+\theta)$$
$$=\cos3\theta+i\sin3\theta$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

であり，すべての自然数 n に対して

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

となると推測できる．これを数学的帰納法により示してみよう．

（Ⅰ）$n=1$ のとき，明らかに①は成り立つ．

（Ⅱ）$n=k$ のとき，①が成り立つとすると

$$z^{k+1}=z^kz$$
$$=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

であり，$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

以上より，すべての自然数 n について①は成り立つ．

また，実数の場合と同じように

$$z^0=1,\quad z^{-n}=\frac{1}{z^n}\quad(n\text{ は自然数})$$

と定めると

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\frac{1}{\cos n\theta+i\sin n\theta}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

となる．よって，次の定理が成り立つ．

重要ポイント10 **ド・モアブルの定理**

整数 n に対して

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

＜3－2　n 乗根＞

自然数 n に対して，方程式

$$z^n = 1$$

をみたす複素数 z を **1 の n 乗根**という．

まずは 1 の 3 乗根(立方根ともいう)，つまり

$$z^3 = 1$$

をみたす z を求めよう．$|z^3| = |z|^3$ であるから，z の絶対値は 1 であり

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

とおける．ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta \end{aligned}$$

であるから，$z^3 = 1$ となるのは

$$\begin{cases} \cos 3\theta = 1 \\ \sin 3\theta = 0 \end{cases}$$

これより

$$3\theta = 2k\pi$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{2}{3}k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

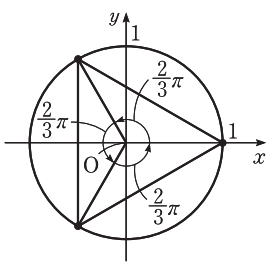
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ であり

$$\begin{aligned} z &= \cos 0 + i\sin 0,\ \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi,\ \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi \\ &= 1,\ \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \end{aligned}$$

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると，ω の偏角は $\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$$\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = \omega^2$$

となる．



これより，1 の 3 乗根は 1，ω，ω^2 の 3 つであり，複素数平面上では単位円に内接する正 3 角形の頂点となっている．

同様にして，1 の n 乗根を求めてみる．ここで

$$z^n = 1$$

となる z の絶対値は 1 であり，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおけるから，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta \end{aligned}$$

であり，$z^n = 1$ となるのは

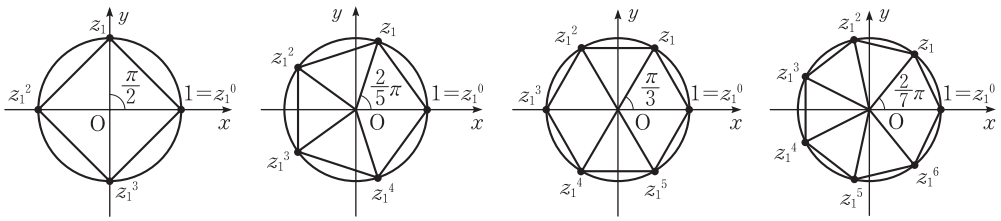
$$\begin{cases} \cos n\theta = 1 \\ \sin n\theta = 0 \end{cases}$$

これより

$$n\theta = 2k\pi$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad (k \text{ は整数})$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲の θ は $k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のときの角であり，これらの表す点は複素数平面上では単位円に内接し，点 1 を 1 つの頂点とする正 n 角形の頂点となっている．



$z^4=1$　　$z^5=1$　　$z^6=1$　　$z^7=1$

重要ポイント11　1 の n 乗根

自然数 n に対して，$z^n = 1$ をみたす z は，複素数平面上において，単位円周上の n 個の点

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

となる．

複素数平面１：重要例題

PM2YA1-Z1J1-10
学習時間のめやす 各10分

例題1

☞ ポイント整理１

次の各問に答えよ．

（１）$\alpha=3+2i$ のとき，次の複素数を複素数平面上に図示せよ．

（ｉ）$i\alpha$　　（ii）$\dfrac{\alpha}{i}$　　（iii）$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$　　（iv）$\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2}$

（２）$\beta=1+2i$ のとき，β^2 と $|\beta|^2$ を求めよ．

（３）次の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする．

（ｉ）$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$　　（ii）$1-\sqrt{3}\,i$

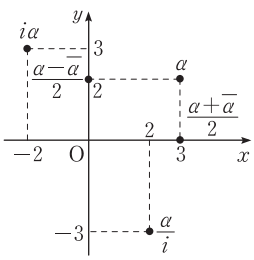
着眼　（１）複素数を複素数平面上に図示する問題．まずは，与えられた式の値を計算して求めよう．

（２）β^2 については，素直に計算すればよいだろう．$|\beta|^2$ については，絶対値の性質 $|\beta|^2=|\beta^2|$ を利用することを考えよう．

（３）与えられた複素数を絶対値と偏角がわかる形に変形することを考えよう．絶対値が１でないときは，まずは絶対値をくくり出すことを考える．

解答

（１）（ｉ）$i\alpha=3i+2i^2$
$=-2+3i$



（ii）$\dfrac{\alpha}{i}=\dfrac{i\alpha}{i^2}=\dfrac{-2+3i}{-1}$
$=2-3i$

（iii）$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$
$=\dfrac{(3+2i)+(3-2i)}{2}$
$=3$

（iv）$\dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2}=\dfrac{(3+2i)-(3-2i)}{2}=2i$

これらを図示すると**右上図**のようになる．　**（答）**

（２）$\beta^2=(1+2i)^2=1+2\cdot2i+(2i)^2=-3+4i$　**（答）**
$|\beta|^2=|\beta^2|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$　**（答）**

← $|\beta|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ より
$|\beta|^2=(\sqrt{5})^2=5$
としてもよい．

（３）（ｉ）$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i=\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi$　**（答）**

（ii）$1-\sqrt{3}\,i$
$=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$　**（答）**

← $|1-\sqrt{3}\,i|=2$
より，２をくくり出した．

例題2

☞ ポイント整理 1

次の各問に答えよ．

（1）α，β を複素数とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$$

（2）複素数 α，β，γ に対して，$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ となるとき，

（i）$\left|\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right|=|\alpha+\beta+\gamma|$ が成り立つことを示せ．

（ii）$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ のとき，$\left|\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right|$ の値を求めよ．

着眼 （1）複素数についての等式を証明する問題．左辺が展開できるので「左辺を変形していって右辺を導く」という方針で考えていけばよいだろう．その際，$\alpha=a+bi$（a，b は実数）などとおいて処理するのは大変であるので，絶対値の性質 $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ を利用することを考えよう．

（2）（i）左辺の方が複雑な形をしているので，左辺を変形することを考える．左辺の式の形を踏まえ，等式の条件 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ をどのように活用すればよいかを考えよう．

（ii）（i）を利用すればよい．

解答

（1）$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2$

$=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}+(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}$ ← $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$ ← $\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$

$=(\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta})+(\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta})$

$=2\alpha\overline{\alpha}+2\beta\overline{\beta}$

$=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$ （証終）

（2）（i）$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ より

$\alpha\overline{\alpha}=1$，$\beta\overline{\beta}=1$，$\gamma\overline{\gamma}=1$ ← $|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}=\overline{\beta}$，$\dfrac{1}{\gamma}=\overline{\gamma}$

これより

$$\left|\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right|=|\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}|$$
$$=|\overline{\alpha+\beta+\gamma}|$$
$$=|\alpha+\beta+\gamma|$$

が成り立つ． （証終）

（ii）（i）より

$$\left|\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\right|=|\alpha+\beta+\gamma|$$ ←（i）の式の左辺を通分した．

$$\therefore\ \left|\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right|=|\alpha\beta\gamma|$$ ← $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ より

$$\left|\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right|=|\alpha||\beta||\gamma|=1$$ （答）

例題3

☞ ポイント整理 2 − 1

3 点 $\alpha=-1+i$，$\beta=1+3i$，$\gamma=3+ai$（a は実数）が一直線上にあるとき，a の値を求めよ．

着眼 原点と 2 点 z，w が一直線上にある条件は，$w\neq 0$ のとき

$z=kw$　（k は実数）　……(☆)

であるので，これを利用することを考えよう。本問の場合，3 点 α，β，γ はいずれも原点ではないので，このままでは(☆)が利用できない。そこで

3 点 α，β，γ のいずれかが原点に一致するように平行移動する

とよいだろう。

解答 3 点 α，β，γ を $-\alpha$ だけ平行移動する．このとき，点 α は原点 O にうつるから

3 点 α，β，γ が一直線上にある

$\Longleftrightarrow$ 3 点 0，$\beta-\alpha$，$\gamma-\alpha$ が一直線上にある

$\Longleftrightarrow$ $\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$ となる実数 k が存在する

ここで

$$\gamma-\alpha=(3+ai)-(-1+i)=4+(a-1)i$$
$$\beta-\alpha=(1+3i)-(-1+i)=2+2i$$

であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{4+(a-1)i}{2+2i}=\frac{\{4+(a-1)i\}(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\frac{(a+3)+(a-5)i}{4}$$

これが実数である条件は

$a-5=0$　　$\therefore$　$a=5$　（答）

← $k(\beta-\alpha)=2k+2ki$ より，$\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$ の実部と虚部を比較して

$4=2k$

$a-1=2k$

これより，$a=5$を導いてもよい．

解説 本問を一般化すると，$\alpha_1\neq\alpha_2$ のとき

3 点 α_1，α_2，α_3 が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=$(実数)

となる．これから

点 z が異なる 2 点 α_1，α_2 を通る直線上にある …(＊) $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{z-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=$(実数)

が成り立つ．実数である条件を極形式で考えると，偏角は 0 または π であるから，$z\neq\alpha_1$ のとき

(＊) $\Longleftrightarrow$ $\arg\dfrac{z-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=0$ または π

と書いてもよい．これについては，「複素数平面 2」で詳しく扱う．

例題 4

☞ ポイント整理 2 − 2

点 $\alpha=\sqrt{3}+i$ に対して，次のように回転した点を表す複素数を求めよ．

（1）点 α を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点．

（2）点 α を点 $1+i$ を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点．

着眼 複素数平面上における回転移動を題材とした問題である．

（1）複素数をかけることは回転拡大を表すことに着目すればよい．つまり，点 α を原点を中心に θ だけ回転した点は

$$(\cos\theta+i\sin\theta)\alpha \quad \cdots\cdots ①$$

と表されることを利用する．

（2）点 α を点 β を中心に θ だけ回転した点は

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\alpha-\beta)+\beta \quad \cdots\cdots ②$$

と表されることを利用する．

解答 $w=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

とおく．

（1）求める点を z_1 とすると

$$z_1=w\alpha$$

←①を利用した．

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(\sqrt{3}+i)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}$$

$$=1+\sqrt{3}\,i \quad \text{（答）}$$

（2）$\beta=1+i$ とおく．

求める点を z_2 とすると

$$z_2=w(\alpha-\beta)+\beta$$

←②を利用した．

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\{(\sqrt{3}+i)-(1+i)\}+(1+i)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(\sqrt{3}-1)+(1+i)$$

$$=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)+(1+i)$$

$$=\frac{5-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i \quad \text{（答）}$$

例題 5

☞ ポイント整理 3

次の各問に答えよ．

（1）$(1+\sqrt{3}\,i)^6$ を計算せよ．

（2）z についての方程式 $z^3=-2+2i$ の解を極形式で表し，複素数平面上で図示せよ．

着眼 （1）$a+bi$（a，b は実数）の形のまま計算をするのは大変であるので，$1+\sqrt{3}\,i$ を極形式で表して，ド・モアブルの定理を利用することを考えよう．

（2）両辺を極形式で表し，両辺の絶対値と偏角をそれぞれ比較すればよい．

解答 （1）$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

であるから

$$(1+\sqrt{3}\,i)^6=2^6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$

$$=64\left\{\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right\}=64 \quad \text{（答）}$$

← ド・モアブルの定理

（2）$$-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

← $-2+2i$ を極形式で表す．

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

ここで，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

← z をこのようにおいて，r や θ についての関係式を求める．

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角をそれぞれ比較して

$$\begin{cases} r^3=2\sqrt{2} \\ 3\theta=\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi \quad (k\text{ は整数}) \end{cases}$$

$r^3=(\sqrt{2})^3$，$r>0$ より

$$r=\sqrt{2}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}k\pi$ のうち，$0\leqq\theta<2\pi$ をみたすものは

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$$

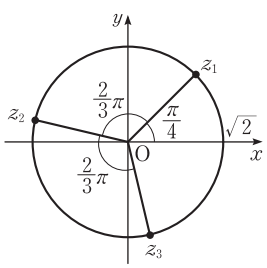
よって，3つの解を z_1，z_2，z_3 とすると

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$$

$$z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$$

であり，これを複素数平面上に図示すると**右図**のようになる． （答）



[見本]　専科　数学Ⅲ基礎　添削問題

ZMBJA1-Z1A4-00

次の関数の極限が存在するかどうかを調べ，存在するときはその極限を求めよ。　（25点）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$　（6点）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$　（8点）

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$　（5点）

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$　（6点）

[見本]　専科　数学Ⅲ基礎　解答解説

ZMBJA1-Z1C4-01

問題

次の関数の極限が存在するかどうかを調べ，存在するときはその極限を求めよ。　(25点)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$　(6点)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$　(8点)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}$　(5点)

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$　(6点)

着眼

関数の極限についての計算問題で，基本的な極限の扱いを確認するのがねらいである。関数の極限も数列の極限と考え方はほとんど同じで

“いかにして不定形を解消するか”

がポイントであり，そのための変形方法に十分慣れておくことが大切である。

(1) $\dfrac{-\infty}{\infty}$ の不定形となる分数関数の極限であり，分母・分子の最も速く大きくなる項に着目すればよい。ひとまず，分母の絶対値をはずすことから始めよう。

(2) $\dfrac{0}{0}$ の不定形であり，これを解消するために分母・分子の約分に気づきたい。(1)と同様分母の絶対値をはずすことから始めればよいが，このときに $x\to-1+0$ の場合と $x\to-1-0$ の場合を分けて考えることが必要となる。片側極限と極限の関係に注意しよう。

(3) これも $\dfrac{0}{0}$ の不定形である。3 角関数の極限では

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

を用いることが多く，この形にもち込むことを考えればよい。

(4) 与式の一部分だけの極限を先にとって，“$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}=1$ から，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}1^x=1$” などとすることはできない。本問では，底→1，指数→∞ となっていることから，自然対数の底 e の定義

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

の利用を考えよう。

解答

(1) $x\to-\infty$ のときを考えるので，$x<-1$ としてよく

$$|x+1|=-(x+1)\qquad\therefore\ |x+1|^3=-(x+1)^3$$

したがって

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=\lim_{x\to-\infty}\left\{-\frac{x^3+1}{(x+1)^3}\right\}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{-\frac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}\right\}$$

$$=-1\qquad\textbf{(答)}$$

◀まず，絶対値記号をはずす。$x\to-\infty$ のときを考えるので，$x<-1$ として構わない。

◀分母・分子を $x^3\,(\neq0)$ で割る。

(2) $$|x+1|^3=\begin{cases}(x+1)^3 & (x>-1 \text{ のとき})\\ -(x+1)^3 & (x<-1 \text{ のとき})\end{cases}$$

◀「$x\to-1$」の極限を考えるので，「$x\to-1+0$」と「$x\to-1-0$」の 2 つの片側極限に分けて調べる。

であるから

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{(x+1)^3}$$

◀まず，$x\to-1+0$ のときの極限を考える。

$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^3}$$

◀分子が因数分解できる。

$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}$$

◀分母・分子を $x+1\,(\neq 0)$ で割ることにより，不定形が解消された。

ここで，$x\to-1+0$ のとき

$(x+1)^2\to+0$，$x^2-x+1\to3$

であるから

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=+\infty$$

一方，同様にして

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=\lim_{x\to-1-0}\left\{-\frac{x^3+1}{(x+1)^3}\right\}$$

◀次に，$x\to-1-0$ のときの極限を考える。

$$=\lim_{x\to-1-0}\left\{-\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right\}$$

であり，$x\to-1-0$ のとき

$(x+1)^2\to+0$，$x^2-x+1\to3$

であるから

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=-\infty$$

以上より，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}\neq\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}$ だから

◀「**解説 1**」参照。

$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}}$ **は存在しない。　(答)**

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x(1+\cos3x)}{1-\cos^23x}$$

◀分母・分子に $1+\cos3x$ をかけた。別解は「**解説 2**」を参照せよ。

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x(1+\cos3x)}{\sin^23x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1+\cos3x}{9}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{3x}{\sin3x}\right)^2\right\}$$

◀ $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を利用する。

$$=\frac{1+1}{9}\cdot1\cdot1$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{9}}\qquad\textbf{(答)}$$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

◀ e の定義を利用できる形に変形していく。

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2$$

$$=\boldsymbol{e^2}\qquad\textbf{(答)}$$

◀ $\displaystyle\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=e$ より。

解説

1 補足 片側極限

(2)では，片側極限と極限の関係

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x) \iff \lim_{x\to a} f(x)\text{が存在する}$$

を用いたわけで，本問では左極限と右極限のそれぞれが

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=-\infty,\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x^3+1}{|x+1|^3}=+\infty$$

のように異なるので，“極限は存在しない”ということになる。

2 別解 (3)変形の仕方を変えて…

(3)は 2 倍角の公式 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ から導かれる

$$1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

を用いて次のように変形してもよい。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2\sin^2\frac{3x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\right\}=\frac{2}{9}$$

なお，本問とほぼ同様の変形によって

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

が得られるが，この結果は利用価値が高いので，準公式として覚えておいてもよいだろう。本問も上式に帰着させると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{9}\cdot\frac{(3x)^2}{1-\cos 3x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot 2\cdot 1=\frac{2}{9}$$

のように求められる。

3 補足 3 角関数の極限，e の定義

3 角関数の絡んだ極限の問題では

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

を，また，「n の式の n 乗」のような形の極限では自然対数の底 e の定義

$$\lim_{\square\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e,\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

を用いることが多い。このとき，極限の中身の式において□の部分には同じものが入らなくてはいけないことに注意しよう。たとえば，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=1$ などとはならず，正しくは

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2$$

とする必要があるわけだ。