# 添削問題解答解説

# 力学2

XQDE2A-11C1-01

## 1 問題

《運動方程式》

図1のように，天井から糸Cで軽くてなめらかな定滑車をつるす。定滑車には，十分に長い糸の両端にそれぞれ質量が $M$，$m(M>m)$ のおもりA，Bを結んだものをかける。初め，BはAより距離 $h$ だけ低い位置にあるように支えておく。ただし，糸はいずれも軽くて伸び縮みしないものとする。また，糸はたるむことなく滑車に沿ってなめらかに移動するものとし，重力加速度の大きさを $g$ とする。（25点）

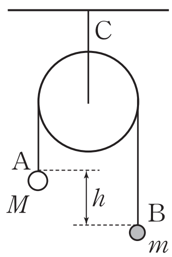



図1

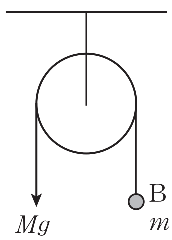



図2

**問1**　支えを静かに外したところ，2つのおもりはそれぞれ同じ大きさの加速度で運動した。このときの加速度の大きさを $a$ とし，AとBを結ぶ糸の張力の大きさを $T$ として，それぞれのおもりについて運動方程式を立てよ。（6点）

**問2**　**問1**のときの $a$ と $T$ の値を，それぞれ $M$，$m$，$g$ を用いて表せ。（4点）

**問3**　**問1**でAとBが運動を始めた後，両者が同じ高さになった瞬間の，Aの速さ $v$ を，$M$，$m$，$g$，$h$ を用いて表せ。（6点）

**問4**　**問1**でAとBが運動している間，定滑車が糸Cから受ける張力の大きさ $S$ を，$M$，$m$，$g$ を用いて表せ。（4点）

**問5**　次に，図2のように，図1の状態からおもりBはそのままにして，質量 $M$ のおもりAの代わりに，Aを結んでいた糸の端を鉛直下向きに大きさ $Mg$ の力で引く。このときのBの加速度の大きさ $a'$ を，$M$，$m$，$g$ を用いて表せ。（5点）

**ポイント**

運動方程式を立てるときは，おもりの運動の向きを，加速度や力の正の向きと定めるとよい。

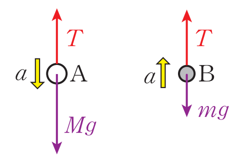
## 解答

**問 1**　A ：$Ma=Mg-T$，B：$ma=T-mg$　　**問 2**　$a=\dfrac{M-m}{M+m}g$，$T=\dfrac{2Mmg}{M+m}$

**問 3**　$v=\sqrt{\dfrac{M-m}{M+m}gh}$　　**問 4**　$S=\dfrac{4Mmg}{M+m}$　　**問 5**　$a'=\dfrac{M-m}{m}g$

## 解説

**問 1**　A，B が受ける重力，張力，および加速度の関係は，右図のようになる。したがって，A，B について，それぞれ運動方程式を立てると




A ：　$\boldsymbol{Ma=Mg-T}$　　**(答)**

B ：　$\boldsymbol{ma=T-mg}$　　**(答)**

◀下向きを正とした。

◀上向きを正とした。

**問 2**　A，B の運動方程式を辺々たしあわせて $T$ を消去すると

$$(M+m)a=(M-m)g$$

$$\therefore\quad a=\boldsymbol{\frac{M-m}{M+m}g}\qquad \textbf{(答)}$$

また，上式を A の運動方程式に代入して $T$ を求めると

$$T=M(g-a)=\boldsymbol{\frac{2Mmg}{M+m}}\qquad \textbf{(答)}$$

◀B の運動方程式に代入して
$T=m(g+a)=\dfrac{2Mmg}{M+m}$
と求めてもよい。

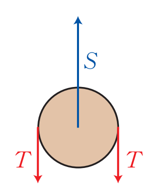
**問 3**　運動中，同じ時間内における A の下降距離と B の上昇距離は等しいので，同じ高さになるのは A が $h/2$ 下がって B が $h/2$ 上がったときである。したがって，求める速さ $v$ は，等加速度運動の式より

$$v^2-0^2=2a\cdot\frac{1}{2}h$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{ah}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{M-m}{M+m}gh}}\qquad \textbf{(答)}$$

◀**問 2** で得た $a$ を代入した。

**問 4**　張力の大きさは糸のどの部分でも等しいから，定滑車の両端に接する位置での張力の大きさはともに $T$ である(右図)。したがって，定滑車が受ける下向きの力の和の大きさは $2T$ であり，これと $S$ がつり合うので



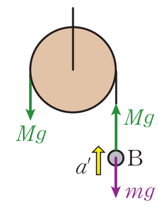

$$S=2T=\boldsymbol{\frac{4Mmg}{M+m}}\qquad \textbf{(答)}$$

◀**問 2** で得た $T$ を代入した。なお，$S=2T$ である理由については，「**研究**」参照。

**問5**　B が受ける力には，下向きの重力 $mg$ と上向きの糸の張力がある。ここで，張力の大きさは糸のどの部分でも等しいので，$Mg$ である(右図)。したがって，B の運動方程式は，上向きを正として

$$ma' = Mg - mg$$

$$\therefore\quad a' = \frac{\boldsymbol{M-m}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{g}$$　**(答)**



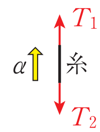

**研究**

### 糸の張力がどこでも等しいこと

右図のように糸の一部を切り出し，この部分が上下から引かれる張力をそれぞれ $T_1$，$T_2$ とする。糸が大きさ $\alpha$ の加速度で上向きに運動するとき，糸の質量が無視できるならば，この部分の運動方程式は

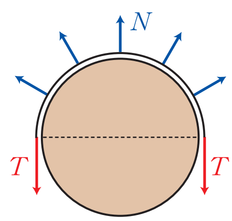
$$0\cdot\alpha = T_1 - T_2 \qquad \therefore\quad T_1 = T_2$$

上式は糸のどの部分でも成立するので，糸の張力はどこでも等しい。




### $S=2T$ であること

定滑車をつるす糸(図1で糸C)の張力の大きさを $S$，定滑車にかけた糸の張力の大きさを $T$ とすると，$S=2T$ となる。このことを，「**解説**」では，定滑車が受ける力には，糸Cからの張力(大きさ $S$ で上向き)と，定滑車にかけた糸からの張力の和(大きさ $2\times T$ で下向き)があり，これらがつり合うことから導いた。これをもう少し丁寧に考えてみよう。




このとき，定滑車の上半円部にかかっている糸の部分だけを切り出して考える。この部分の糸は，定滑車の各部から右上図のように垂直抗力を受けており，さらに半円(右上図の破線)より下の部分の糸から，両側でそれぞれ大きさ $T$ の張力を受けている。上半円部にかかっている糸が落下しないのは，垂直抗力の合力(大きさ $N$)が，両側の2つの張力とつり合うからである。このことより，糸が定滑車から受ける垂直抗力の合力は上向きで，その大きさは $N=2T$ であることがわかる。次に，定滑車が受ける力のつり合いを考えると，定滑車が糸に及ぼす垂直抗力の反作用として，糸は定滑車に下向きに大きさ $N=2T$ の力を及ぼす。これと，定滑車をつっている糸Cによる張力がつり合っているから，$\underline{S=2T}$ である。