

この教材見本は、実際の1カ月分の教材よりも回数・ページ数が少ないダイジェスト版です。

※実際の教材の1カ月あたりの学習量は、1回30分×8回です。

この教材見本は1カ月分の一部を抜粋して掲載しています。下記の黒字が今回の掲載回です。

※テキストスタイルの見本になります。

※添削問題は、「一貫標準」「一貫発展」の問題を掲載しています。

## 2次関数1

- ① 要点学習 要点1
  - ② 要点学習 要点2
  - ③ 要点学習 要点3
  - ④ 要点学習 要点4
  - ⑤ 応用学習 グラフで迷わず場合わけ
  - ⑥ 応用学習 ここで差がつく決定問題
  - ⑦ 添削問題 添削問題1
  - ⑧ 添削問題 添削問題2
- 巻末 添削指導例

3

## 要点学習 2次関数 1

## 要点 3

30分

## 要点

## 2次関数の最大・最小

## 【1】2次関数の最大・最小

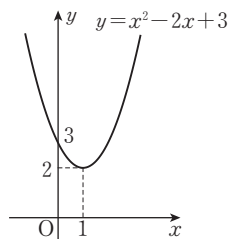
関数の値域に最大の値があるとき、その値を最大値といい、最小の値があるとき、その値を最小値という。2次関数の最大値や最小値を求める場合は、グラフを利用するとよい。

(例) 2次関数  $y = x^2 - 2x + 3$  の最大値, 最小値をそれぞれ求めなさい。

$$y = (x-1)^2 + 2 \text{ より}$$

最大値; なし

最小値;  $2 (x=1)$  (答)



←  $y$ の値はいくらでも大きくなるので、「最大値はなし」となる。

定義域に制限のある2次関数の最大値や最小値を求める場合は、定義域に注意しながら考察する。

(例) 次の各場合において、2次関数  $y = x^2 - 2x + 3$  の最大値, 最小値をそれぞれ求めなさい。

①  $-1 \leq x \leq 2$  のとき

$x = -1$  のとき

$$y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 6$$

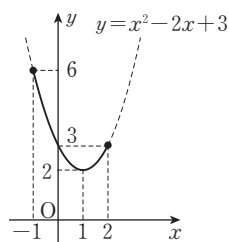
また、 $x = 2$  のとき

$$y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$$

グラフは右の図のようになるので

最大値;  $6 (x = -1)$  (答)

最小値;  $2 (x = 1)$



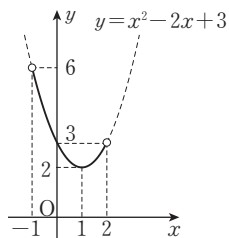
← 定義域にふくまれる部分は実線で、ふくまれない部分は点線で示す。端点については、その点をふくむときは●、ふくまないときは○で示す。

②  $-1 < x < 2$  のとき

グラフは右の図のようになるので

最大値; なし

最小値;  $2 (x = 1)$  (答)



←  $x = -1$  は定義域にふくまれないので、「最大値はなし」となる(6ではない)。

## 2次関数の最大・最小(文字定数をふくむ)

### 【1】2次関数の最大・最小(文字定数をふくむ)

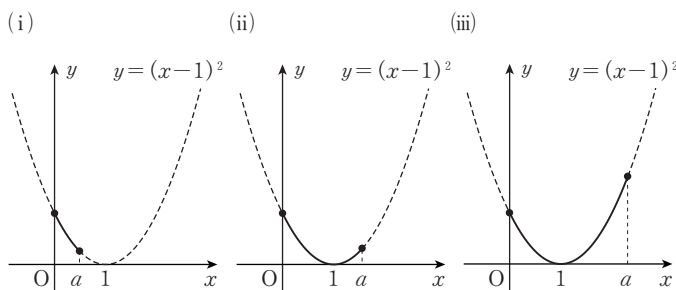
2次関数の係数や定義域に文字定数がふくまれていると、文字定数の値によって、2次関数のグラフや定義域が変化する。そこで、文字定数の値によって場合を分けて考える。その際

- ・ 軸が定義域の内にあるか外にあるか
- ・ 軸が定義域の外にある場合、軸が定義域の左側か右側か
- ・ 軸が定義域の内にある場合、軸が定義域の中央より左寄りか右寄りか

を意識して場合分けをするとよい。

(例)  $f(x) = (x-1)^2$  ( $0 \leq x \leq a$ , ただし  $a > 0$ ) の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。

軸と定義域の位置関係に着目して、場合分けをする。



(i)  $0 < a \leq 1$  のとき

最大値 ;  $f(0) = 1$

最小値 ;  $f(a) = (a-1)^2$

(ii)  $\frac{a}{2} \leq 1 \leq a$ , すなわち,  $1 \leq a \leq 2$  のとき

最大値 ;  $f(0) = 1$

最小値 ;  $f(1) = 0$

(iii)  $1 \leq \frac{a}{2}$ , すなわち,  $2 \leq a$  のとき

最大値 ;  $f(a) = (a-1)^2$

最小値 ;  $f(1) = 0$

← 軸が定義域の外(境界をふくむ)で、定義域の右側にあるとき。

← 軸が定義域の内(境界をふくむ)で、定義域の中央もしくは中央より右側にあるとき。

← 軸が定義域の内、定義域の中央もしくは中央より左側にあるとき。

(注意)  $a = 1$  は(i), (ii)のどちらか一方にのみ,  $a = 2$  は(ii), (iii)のどちらか一方にのみふくめればよい。

## 練習問題

今回は

- ・2次関数の最大・最小
- ・2次関数の最大・最小(文字定数をふくむ)

について学習しました。学習内容をまとめておきますので、問題を解く前に確認しておきましょう。

### ◆2次関数の最大・最小

#### 1 2次関数の最大・最小

関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の**最大値**といい、最小の値があるとき、その値を関数の**最小値**という。

2次関数の最大・最小を求める場合は、**グラフを利用して視覚的に考える**。ただし、2次関数の定義域に制限がある場合は、**定義域に注意しながら考察する**。

### ◆2次関数の最大・最小(文字定数をふくむ)

#### 1 2次関数の最大・最小(文字定数をふくむ)

2次関数の係数や定義域に文字定数をふくむときは、場合分けが必要になる場合が多い。場合分けをする際には、次の点に注意する。

- ・軸が定義域の内にあるか外にあるか。
- ・軸が定義域の外にある場合、軸が定義域の左側か右側か。
- ・軸が定義域の内にある場合、軸が定義域の中央より左寄りか右寄りか。

それでは、次のページから始まる問題に取り組みましょう。



**1**

2次関数  $y = x^2 + 4x$  について、次の①～③の場合の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。

- ① 定義域がすべての実数のとき
- ② 定義域が  $-3 \leq x \leq 1$  のとき
- ③ 定義域が  $0 \leq x < 1$  のとき

**2**

2次関数  $y = -x^2 + 2x + 2$  について、次の①～③の場合の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。

- ① 定義域がすべての実数のとき
- ② 定義域が  $0 \leq x \leq 2$  のとき
- ③ 定義域が  $-1 \leq x < 0$  のとき

**3**

$f(x) = -x^2 + 6x - 7$  ( $0 \leq x \leq a$ , ただし  $a > 0$ )の最大値, 最小値をそれぞれ求めなさい。

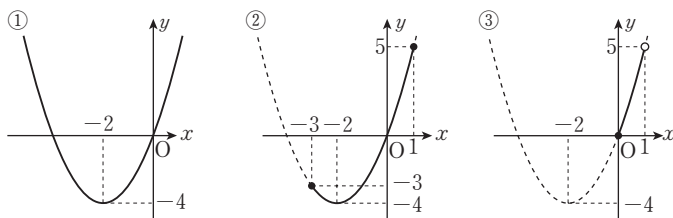
## 練習問題の解答

- 1 ① 最大値；なし，最小値； $-4$  ( $x = -2$ )  
 ② 最大値； $5$  ( $x = 1$ )，最小値； $-4$  ( $x = -2$ )  
 ③ 最大値；なし，最小値； $0$  ( $x = 0$ )

$y = x^2 + 4x$ の右辺を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x + 4 - 4 \\ &= (x+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

よって、①～③のそれぞれの場合について、グラフをかくと次のようになる。

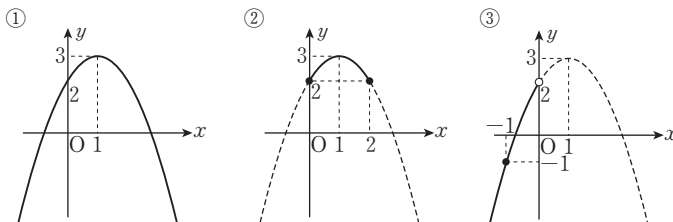


- 2 ① 最大値； $3$  ( $x = 1$ )，最小値；なし  
 ② 最大値； $3$  ( $x = 1$ )，最小値； $2$  ( $x = 0, 2$ )  
 ③ 最大値；なし，最小値； $-1$  ( $x = -1$ )

$y = -x^2 + 2x + 2$ の右辺を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 2x) + 2 \\ &= -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 2 \\ &= -(x-1)^2 + 1 + 2 \\ &= -(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって、①～③のそれぞれの場合について、グラフをかくと次のようになる。



**3**  $0 < a \leq 3$  のとき

最大値 ;  $-a^2 + 6a - 7$  ( $x = a$ ), 最小値 ;  $-7$  ( $x = 0$ )

$3 \leq a \leq 6$  のとき

最大値 ;  $2$  ( $x = 3$ ), 最小値 ;  $-7$  ( $x = 0$ )

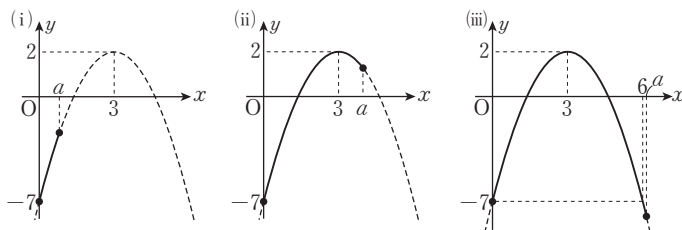
$6 \leq a$  のとき

最大値 ;  $2$  ( $x = 3$ ), 最小値 ;  $-a^2 + 6a - 7$  ( $x = a$ )

$f(x) = -x^2 + 6x - 7$  の右辺を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 6x) - 7 \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) - 7 \\ &= -(x - 3)^2 + 9 - 7 \\ &= -(x - 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

これより、軸  $x = 3$  と定義域  $0 \leq x \leq a$  の位置関係を考慮して、次の3つの場合に分けて考える。



上のグラフより

(i)  $0 < a \leq 3$  のとき

最大値 ;  $f(a) = -a^2 + 6a - 7$

最小値 ;  $f(0) = -7$

(ii)  $\frac{a}{2} \leq 3 \leq a$  すなわち  $3 \leq a \leq 6$  のとき

最大値 ;  $f(3) = 2$

最小値 ;  $f(0) = -7$

(iii)  $3 \leq \frac{a}{2}$  すなわち  $6 \leq a$  のとき

最大値 ;  $f(3) = 2$

最小値 ;  $f(a) = -a^2 + 6a - 7$

5

## 応用学習 2次関数 1

## グラフで迷わず場合分け

30分

さて、今回は、2次関数の係数や定義域に文字定数がふくまれている場合の最大・最小問題を集中的に扱っていきます。このタイプの問題は定数の値によってグラフや定義域が変化するため、**軸と定義域の位置関係**に着目し

- ・軸が定義域の内にあるか外にあるか
- ・軸が定義域の外にある場合、軸が定義域の左側か右側か
- ・軸が定義域の内にある場合、軸が定義域の中央より左寄りか右寄りか

という観点で「場合分け」をして考えていけばよかったですね。ところが、この観点を頭で理解していたとしても、いざ問題を解くことになると

場合分けに自信がもてない／うまく説明できない

という人が多いようです。

ここでは、この場合分けを迷わず自信をもって説明できるようになってもらうのが目標です。ポイントはズバリ

**グラフをうまく利用する**

ということ。以下の「解法の研究」で詳しく説明していきます！

## 解法の研究

## 【1】定義域に文字定数をふくむ場合

まずは、定義域に文字定数をふくむ場合を考えてみましょう。

## 例題

$t$  を実数の定数とするとき、関数  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$  ( $t \leq x \leq t+2$ ) の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。

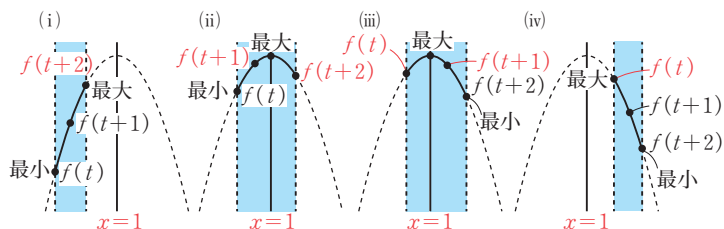
## 考え方

$f(x)$  の右辺を平方完成すると

$$f(x) = -(x-1)^2 - 2$$

なので、 $y=f(x)$  は直線  $x=1$  を軸とする上に凸の放物線です( $t$ の値が変化しても動きません)。一方、定義域は $t$ の値によって動きます。

まずは、最大値、最小値をとる $x$ の値が、 $t$ の値によってどのように変化するか**グラフをかいて捉えましょう**。 $t$ の値を徐々に大きくして定義域を動かしていくと、次の4パターンがあることがわかります。



- (i)  $x = t + 2$  で最大値,  $x = t$  で最小値をとる。
- (ii)  $x = 1$  で最大値,  $x = t$  で最小値をとる。
- (iii)  $x = 1$  で最大値,  $x = t + 2$  で最小値をとる。
- (iv)  $x = t$  で最大値,  $x = t + 2$  で最小値をとる。

あとは, (i)~(iv)となるのは $t$ の値がどのようなときかを考えてみましょう。  
このとき, **グラフの軸と定義域の位置関係に着目する**とよく

- ・ 定義域の左端, 中央, 右端
- ・ 2次関数のグラフの軸

の位置関係に注意して, (i)~(iv)の各場合の特徴を見抜きましょう。

### 解答

$f(x) = -x^2 + 2x - 3$  の右辺を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2x) - 3 \\ &= -(x - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

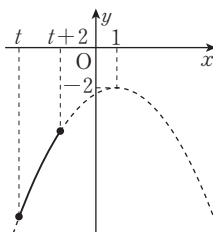
- (i)  $t + 2 \leq 1$ , すなわち,  $t \leq -1$  のとき

← (定義域の右端)  $\leq$  (軸)

$t \leq x \leq t + 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\begin{aligned} \text{最大値;} \quad f(t + 2) &= -(t + 2 - 1)^2 - 2 \\ &= -t^2 - 2t - 3 \end{aligned}$$

$$\text{最小値;} \quad f(t) = -t^2 + 2t - 3$$



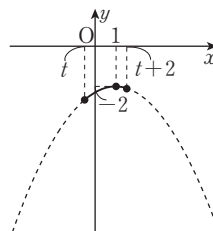
- (ii)  $t + 1 \leq 1 \leq t + 2$ , すなわち,  $-1 \leq t \leq 0$  のとき

← (定義域の中央)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の右端)

$t \leq x \leq t + 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} \quad f(1) = -2$$

$$\text{最小値;} \quad f(t) = -t^2 + 2t - 3$$



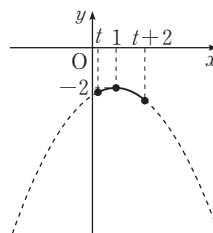
- (iii)  $t \leq 1 \leq t + 1$ , すなわち,  $0 \leq t \leq 1$  のとき

← (定義域の左端)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の中央)

$t \leq x \leq t + 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} \quad f(1) = -2$$

$$\text{最小値;} \quad f(t + 2) = -t^2 - 2t - 3$$

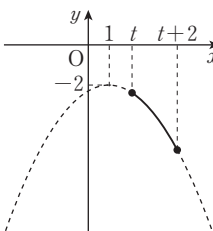


- (iv)  $1 \leq t$  のとき ← (軸)  $\leq$  (定義域の左端)

$t \leq x \leq t + 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} \quad f(t) = -t^2 + 2t - 3$$

$$\text{最小値;} \quad f(t + 2) = -t^2 - 2t - 3$$



(i)~(iv)より, 求める最大値, 最小値は

$t \leq -1$  のとき

最大値;  $-t^2 - 2t - 3$  ( $x = t + 2$ ), 最小値;  $-t^2 + 2t - 3$  ( $x = t$ )

$-1 \leq t \leq 0$  のとき

最大値;  $-2$  ( $x = 1$ ), 最小値;  $-t^2 + 2t - 3$  ( $x = t$ )

$0 \leq t \leq 1$  のとき

最大値;  $-2$  ( $x = 1$ ), 最小値;  $-t^2 - 2t - 3$  ( $x = t + 2$ )

$1 \leq t$  のとき

最大値;  $-t^2 + 2t - 3$  ( $x = t$ ), 最小値;  $-t^2 - 2t - 3$  ( $x = t + 2$ )

(答)

### 解説

答案をまとめるときは, (i)~(iv)の場合ごとにグラフをかいておくと, 自分の考え方が読み手に伝わりやすくなります。

それでは, グラフを利用して軸と定義域の位置関係を把握することを意識しながら, 定義域に文字をふくむタイプの最大・最小問題を解いてみましょう。

## 問題演習

▶解答は5回目の最後

1

$t$  を実数の定数とするとき, 関数  $f(x) = -x^2 + 4x + 5$  ( $t \leq x \leq t + 4$ ) の最小値を求めなさい。



**2**

$t$ を実数の定数とするとき、関数  $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$  ( $t-1 \leq x \leq t+1$ ) の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。

## 解法の研究

### 【2】2次関数の係数に文字定数をふくむ場合

次に、2次関数の係数に文字定数をふくむ場合を考えてみましょう。次の「例題」を見てください。

#### 例題

$p$ が実数の定数のとき、関数  $f(x) = x^2 - 4px + 3p + 1$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。

#### 考え方

本問では、定義域は  $-2 \leq x \leq 2$  で動きませんが、 $f(x)$ について

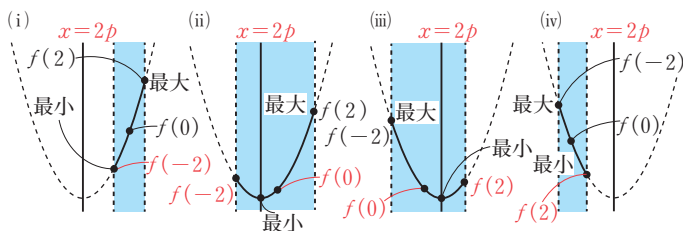
$$f(x) = (x - 2p)^2 - 4p^2 + 3p + 1$$

より、軸が直線  $x = 2p$ 、頂点が点  $(2p, -4p^2 + 3p + 1)$  の下に凸の放物線となり、 $p$ の値によってグラフが動きます。

動くものが定義域からグラフに変わっても

**考え方は定義域が動く場合と同じです！**

まずは、最大値・最小値をとる  $x$  の値がどのように変化するかを、**グラフをかくて捉えます**。 $p$ の値を徐々に大きくしてグラフを動かすと、ここでも、以下の4パターンがあることがわかります。



- (i)  $x = 2$  で最大値、 $x = -2$  で最小値をとる。
- (ii)  $x = 2$  で最大値、 $x = 2p$  で最小値をとる。
- (iii)  $x = -2$  で最大値、 $x = 2p$  で最小値をとる。
- (iv)  $x = -2$  で最大値、 $x = 2$  で最小値をとる。

あとは、**グラフを使って軸と定義域の位置関係を捉え**、(i)~(iv)となるのは  $p$ の値がどのようなときかを考えてみましょう。

#### 解答

$f(x) = x^2 - 4px + 3p + 1$  の右辺を平方完成すると

$$f(x) = (x - 2p)^2 - 4p^2 + 3p + 1$$

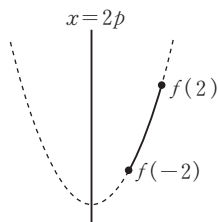
(i)  $2p \leq -2$ , すなわち,  $p \leq -1$  のとき

← (軸)  $\leq$  (定義域の左端)

$-2 \leq x \leq 2$  における  $y=f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\begin{aligned} \text{最大値;} f(2) &= 4 - 8p + 3p + 1 \\ &= -5p + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最小値;} f(-2) &= 4 + 8p + 3p + 1 \\ &= 11p + 5 \end{aligned}$$



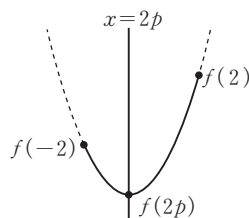
(ii)  $-2 \leq 2p \leq 0$ , すなわち,  $-1 \leq p \leq 0$  のとき

← (定義域の左端)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の中央)

$-2 \leq x \leq 2$  における  $y=f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} f(2) = -5p + 5$$

$$\text{最小値;} f(2p) = -4p^2 + 3p + 1$$



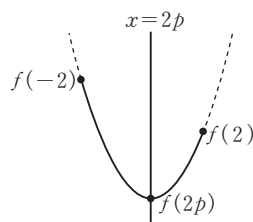
(iii)  $0 \leq 2p \leq 2$ , すなわち,  $0 \leq p \leq 1$  のとき

← (定義域の中央)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の右端)

$-2 \leq x \leq 2$  における  $y=f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} f(-2) = 11p + 5$$

$$\text{最小値;} f(2p) = -4p^2 + 3p + 1$$



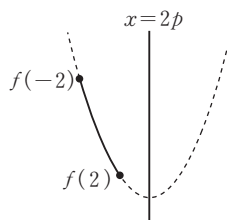
(iv)  $2 \leq 2p$ , すなわち,  $1 \leq p$  のとき

← (定義域の右端)  $\leq$  (軸)

$-2 \leq x \leq 2$  における  $y=f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} f(-2) = 11p + 5$$

$$\text{最小値;} f(2) = -5p + 5$$



(i)~(iv)より, 求める最大値, 最小値は

$p \leq -1$  のとき

最大値;  $-5p + 5$  ( $x=2$ ), 最小値;  $11p + 5$  ( $x=-2$ )

$-1 \leq p \leq 0$  のとき

最大値;  $-5p + 5$  ( $x=2$ ), 最小値;  $-4p^2 + 3p + 1$  ( $x=2p$ )

$0 \leq p \leq 1$  のとき

最大値;  $11p + 5$  ( $x=-2$ ), 最小値;  $-4p^2 + 3p + 1$  ( $x=2p$ )

$1 \leq p$  のとき

最大値;  $11p + 5$  ( $x=-2$ ), 最小値;  $-5p + 5$  ( $x=2$ )

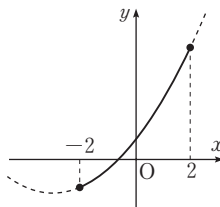
(答)

## 解説

本問のように、グラフが動く場合は、グラフをかき際に  $x$  軸や  $y$  軸とグラフの位置関係に気をつける必要があります。たとえば、(i)の  $p \leq -1$  のとき

$$f(0) = 3p + 1 \leq -2$$

となるので、(i)のときのグラフとしてうっかり右のようなグラフをかいてしまうと、減点されてしまう



可能性があります( $y = f(x)$  のグラフは  $y$  軸の負の部分と交わらなければなりませんね)。

最大・最小問題では、定義域とグラフの軸の位置関係がわかれば十分なので、グラフをかくときは  $x$  軸や  $y$  軸を省略してもよいでしょう。

今回は

【1】定義域に文字定数をふくむ場合

【2】2次関数の係数に文字定数をふくむ場合

の2つの場合をみてきましたが、いずれの場合も

- ① **グラフをかいて**、最大値・最小値をとる  $x$  の値がどのように変化するかを捉える
- ② ①で考察した各場合がおきるのは文字定数の値がどのようなときか、**グラフを使って軸と定義域の位置関係を捉える**

ことを考えていきました。このように、グラフをうまく使いこなすことで、自信をもって場合分けの説明ができるようになりますよ！

それでは、2次関数の係数に文字定数をふくむタイプの最大・最小問題を解いてみましょう。①と②を意識して取り組んでください。

**問題演習**

▶解答は5回目の最後

**3**

$p$ が実数の定数のとき、関数  $f(x) = -3x^2 + 6px - 3p^2$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。

**4**

$p$ が実数の定数のとき、関数  $f(x) = x^2 - 2px + 2p - 1$  ( $-4 \leq x \leq 2$ ) の最大値、最小値をそれぞれ求めなさい。ただし、 $p > 0$  とする。

## 問題演習の解答

1

$f(x) = -x^2 + 4x + 5$  の右辺を平方完成すると

$$f(x) = -(x^2 - 4x) + 5$$

$$= -(x-2)^2 + 9$$

(i)  $t+2 \leq 2$ , すなわち,  $t \leq 0$  のとき

← (定義域の中央)  $\leq$  (軸)

$t \leq x \leq t+4$  における  $y=f(x)$  のグラフは、  
右の図の実線部分になるので、最小値は

$$f(t) = -t^2 + 4t + 5$$

(ii)  $2 \leq t+2$ , すなわち,  $0 \leq t$  のとき

← (軸)  $\leq$  (定義域の中央)

$t \leq x \leq t+4$  における  $y=f(x)$  のグラフは、  
右の図の実線部分になるので、最小値は

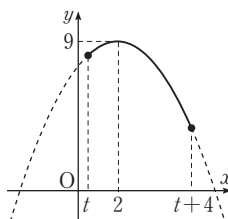
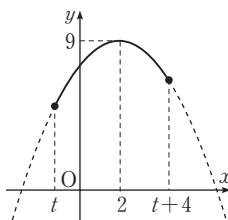
$$f(t+4) = -(t+4-2)^2 + 9$$

$$= -t^2 - 4t + 5$$

(i), (ii)より, 求める最小値は

$$t \leq 0 \text{ のとき, } -t^2 + 4t + 5 \quad (x=t)$$

$$0 \leq t \text{ のとき, } -t^2 - 4t + 5 \quad (x=t+4)$$



(答)

2

$f(x) = 2x^2 + 4x + 3$  の右辺を平方完成すると

$$f(x) = 2(x^2 + 2x) + 3 = 2(x+1)^2 + 1$$

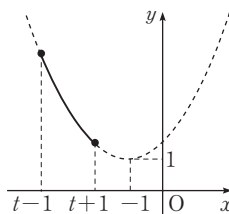
(i)  $t+1 \leq -1$ , すなわち,  $t \leq -2$  のとき

← (定義域の右端)  $\leq$  (軸)

$t-1 \leq x \leq t+1$  における  $y=f(x)$  のグラフは, 右の図の実線部分になるので

$$\begin{aligned} \text{最大値;} f(t-1) &= 2(t-1+1)^2 + 1 \\ &= 2t^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最小値;} f(t+1) &= 2(t+1+1)^2 + 1 \\ &= 2t^2 + 8t + 9 \end{aligned}$$



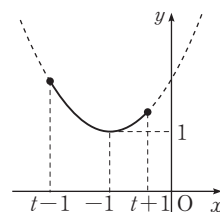
(ii)  $t \leq -1 \leq t+1$ , すなわち,  $-2 \leq t \leq -1$  のとき

← (定義域の中央)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の右端)

$t-1 \leq x \leq t+1$  における  $y=f(x)$  のグラフは, 右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} f(t-1) = 2t^2 + 1$$

$$\text{最小値;} f(-1) = 1$$



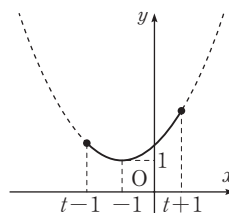
(iii)  $t-1 \leq -1 \leq t$ , すなわち,  $-1 \leq t \leq 0$  のとき

← (定義域の左端)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の中央)

$t-1 \leq x \leq t+1$  における  $y=f(x)$  のグラフは, 右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} f(t+1) = 2t^2 + 8t + 9$$

$$\text{最小値;} f(-1) = 1$$



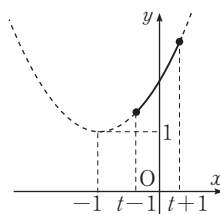
(iv)  $-1 \leq t-1$ , すなわち,  $0 \leq t$  のとき

← (軸)  $\leq$  (定義域の左端)

$t-1 \leq x \leq t+1$  における  $y=f(x)$  のグラフは, 右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} f(t+1) = 2t^2 + 8t + 9$$

$$\text{最小値;} f(t-1) = 2t^2 + 1$$



(i)~(iv)より, 求める最大値, 最小値は

$t \leq -2$  のとき

最大値;  $2t^2 + 1$  ( $x = t-1$ ), 最小値;  $2t^2 + 8t + 9$  ( $x = t+1$ )

$-2 \leq t \leq -1$  のとき

最大値;  $2t^2 + 1$  ( $x = t-1$ ), 最小値;  $1$  ( $x = -1$ )

$-1 \leq t \leq 0$  のとき

最大値;  $2t^2 + 8t + 9$  ( $x = t+1$ ), 最小値;  $1$  ( $x = -1$ )

$0 \leq t$  のとき

最大値;  $2t^2 + 8t + 9$  ( $x = t+1$ ), 最小値;  $2t^2 + 1$  ( $x = t-1$ ) (答)

3

$f(x) = -3x^2 + 6px - 3p^2$  の右辺を平方完成すると

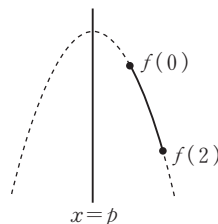
$$\begin{aligned} f(x) &= -3(x^2 - 2px) - 3p^2 \\ &= -3(x-p)^2 \end{aligned}$$

(i)  $p \leq 0$  のとき ← (軸)  $\leq$  (定義域の左端)

$0 \leq x \leq 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは、右の図の実線部分になるので

最大値;  $f(0) = -3p^2$

最小値;  $f(2) = -3p^2 + 12p - 12$



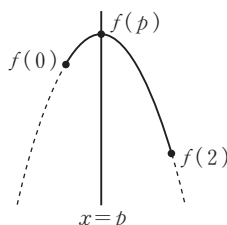
(ii)  $0 \leq p \leq 1$  のとき

← (定義域の左端)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の中央)

$0 \leq x \leq 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは、右の図の実線部分になるので

最大値;  $f(p) = 0$

最小値;  $f(2) = -3p^2 + 12p - 12$



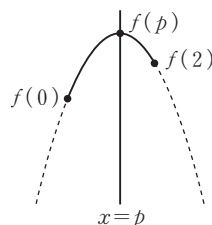
(iii)  $1 \leq p \leq 2$  のとき

← (定義域の中央)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の右端)

$0 \leq x \leq 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは、右の図の実線部分になるので

最大値;  $f(p) = 0$

最小値;  $f(0) = -3p^2$

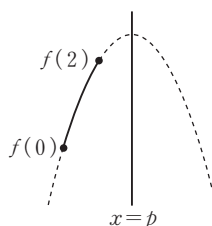


(iv)  $2 \leq p$  のとき ← (定義域の右端)  $\leq$  (軸)

$0 \leq x \leq 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは、右の図の実線部分になるので

最大値;  $f(2) = -3p^2 + 12p - 12$

最小値;  $f(0) = -3p^2$





(i)~(iv)より, 求める最大値, 最小値は

$p \leq 0$  のとき

最大値;  $-3p^2$  ( $x=0$ ), 最小値;  $-3p^2+12p-12$  ( $x=2$ )

$0 \leq p \leq 1$  のとき

最大値;  $0$  ( $x=p$ ), 最小値;  $-3p^2+12p-12$  ( $x=2$ )

(答)

$1 \leq p \leq 2$  のとき

最大値;  $0$  ( $x=p$ ), 最小値;  $-3p^2$  ( $x=0$ )

$2 \leq p$  のとき

最大値;  $-3p^2+12p-12$  ( $x=2$ ), 最小値;  $-3p^2$  ( $x=0$ )

4

$f(x) = x^2 - 2px + 2p - 1$  の右辺を平方完成すると

$$f(x) = (x-p)^2 - p^2 + 2p - 1$$

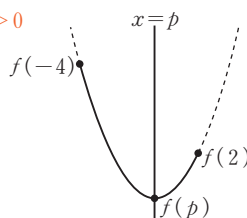
(i)  $0 < p \leq 2$  のとき

← (定義域の中央)  $\leq$  (軸)  $\leq$  (定義域の右端),  $p > 0$

$-4 \leq x \leq 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\begin{aligned} \text{最大値;} f(-4) &= 16 + 8p + 2p - 1 \\ &= 10p + 15 \end{aligned}$$

$$\text{最小値;} f(p) = -p^2 + 2p - 1$$

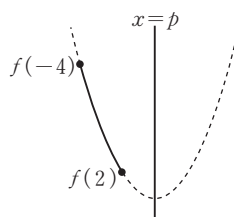


(ii)  $2 \leq p$  のとき ← (定義域の右端)  $\leq$  (軸)

$-4 \leq x \leq 2$  における  $y = f(x)$  のグラフは,  
右の図の実線部分になるので

$$\text{最大値;} f(-4) = 10p + 15$$

$$\begin{aligned} \text{最小値;} f(2) &= 4 - 4p + 2p - 1 \\ &= -2p + 3 \end{aligned}$$



(i), (ii)より, 求める最大値, 最小値は

$0 < p \leq 2$  のとき

最大値;  $10p+15$  ( $x=-4$ ), 最小値;  $-p^2+2p-1$  ( $x=p$ ) (答)

$2 \leq p$  のとき

最大値;  $10p+15$  ( $x=-4$ ), 最小値;  $-2p+3$  ( $x=2$ )

8

2次関数 1

添削問題 2



「一貫標準」の問題です。

3 次の各問いに答えなさい。(配点 25)

- (1)  $a$  を実数の定数とする 2 次関数

$$f(x) = x^2 - 4ax + 1$$

の  $-2 \leq x \leq 2$  における最小値を  $m$  とする。このとき、 $m$  を  $a$  の式で表しなさい。(12点)

- (2)  $a, b$  を実数の定数とするとき、 $x$  の 2 次関数

$$f(x) = ax^2 - 4ax + b \quad (a > 0)$$

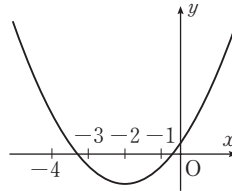
の  $0 \leq x \leq 5$  における最大値が 8, 最小値が  $-1$  である。このとき、 $f(x)$  を求めなさい。(13点)

「一貫標準」「一貫発展」共通の問題です。

4 次の各問いに答えなさい。(配点 25)

- (1) 関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  について、 $y = f(x)$  のグラフが右の図のようであるとき、次の符号を調べなさい。

- (ア)  $a$  (4点)
- (イ)  $c$  (4点)
- (ウ)  $b$  (4点)
- (エ)  $9a - 3b + c$  (4点)



- (2) 2次関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) について、 $y = f(x)$  のグラフが第1象限、第2象限、第3象限、第4象限のうち、ちょうど3つの象限を通るようにしたい。このとき、 $a, b, c$  がみたす条件を答えなさい。

(9点)

8

2次関数1

添削問題2

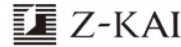
30分

「一貫発展」の問題です。

- 3  $-4 \leq x \leq 0$  において、2次関数  $f(x) = ax^2 + 6ax + a^2 - 4$  ( $a \neq 0$ ) の最小値は6となる。これをみたす  $a$  の値とそのときの  $-4 \leq x \leq 0$  における関数  $f(x)$  の最大値を、すべて求めなさい。ただし、 $a$  は実数の定数とする。  
(配点 25)

# 解答用紙

禁無断転載



この答案の添削有効期限は \_\_\_\_\_ です。

※解答は、濃く、はっきりと記入ください。

2/2枚目  
PMT4E1-S1D2

総得点 **33** / 50

**2次関数 1**  
添削問題 2

**3** PMT4E1-S1C3  
(1)は答えのみでよい。(2)は答えだけでなく考え方も示すこと。

1  
12 / 12

(1)

$$a \leq -1 \text{ のとき } m = 8a + 5$$

$$-1 \leq a \leq 1 \text{ のとき } m = -4a^2 + 1$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } m = -8a + 5$$

係数に文字が入った2次関数の最大、最小を考えると、軸と定義域の位置関係に着目して場合分けをして考えるのがポイントでしたね。

2  
5 / 13

(2)

$$f(x) = ax^2 - 4ax + b$$

$$= a(x^2 - 4x) + b$$

$$= a(x-2)^2 - 4a + b$$

よって

$x=0$  のとき 最大  
 $x=2$  のとき 最小、最大値をとる  $x$  の値が間違っています。

よって

$$f(0) = -4a + b = 8 \text{ 代入ミス}$$

$$f(2) = 4a - 8a + b = -4a + b = -1$$

(答)

問題を解く方針は問題ありません。  
軸が定義域の中央より左側にあるので、 $x=5$  で最大となることがわかります。

▼解答が終わってから記入しましょう。

学年 1・2 卒/志望校 東京 大学  
 解答時間 25 分

答案感欄

$f(x) = a$  とか  $b$  とか  $\lambda$  が入ると  
 と混乱しそうになりまの。

難しかった問題 [ 1 ] (2)

添削者より

式に複数の文字がでてくるとややこしいですね。2次関数を扱うときは、とり得る値によって、場合分けが必要なケースも多いので、注意して取り組みましょう。大問4の(2)はその点がポイントでした。

添削者名

田中

4 PMT4E1-S1C4  
 (1)は答えのみでよい。(2)は答えだけでなく考え方も示すこと。

3  
4/4

(1)(ア)  $a > 0$

4  
4/4

(イ)  $c > 0$

5  
4/4

(ウ)  $b > 0$

6  
0/4

エ  $9a - 3b + c > 0$

7  
4/9

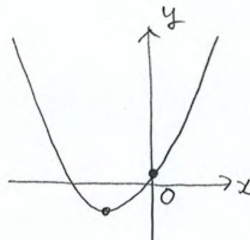
(2)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

条件  $\varepsilon \neq 0$  のは OK



- ・ 頂点が  $x$  軸より下側にある
- ・  $x$  軸と  $y > 0$  の部分で交わる

とき  $\neq 0$  のとき 原点を通っても条件をみたすので、 $y \geq 0$  です。

$$-\frac{b^2}{4a} + c < 0, \quad f(0) > 0$$

等号も入ります。

$$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0, \quad c > 0$$

$$4ac - b^2 < 0, \quad c > 0$$

(答)  $4ac - b^2 < 0, \quad c > 0, \quad c \geq 0$

$x$  がどんな値をとるときに  $f(x)$  が  $9a - 3b + c$  となるか考えてみましょう。

この考察は、 $y = f(x)$  の頂点が  $y$  軸上でない場合についてのものです。 $y = f(x)$  の頂点が  $y$  軸上にあるとき、 $c \geq 0$ 、 $c < 0$  のどちらの場合でも、 $y = f(x)$  のグラフがちょうど3つの象限を通ることはありません。



$y = f(x)$  の頂点が  $y$  軸上にある場合も考察する必要があります。場合わけをして、答案をまとめるとよいでしょう。