この教材見本は、実際の１カ月分の教材よりも回数・ページ数が少ないダイジェスト版です。

※実際の教材の１カ月あたりの学習量は、１回30分×８回です。

この教材見本は１カ月分の一部を抜粋して掲載しています。

下記の黒字が今回の掲載回です。

※テキストスタイル、進学クラスの教材見本です。

２乗に比例する関数

1 要点学習　要点１

2 要点学習　要点２

3 要点学習　要点３

4 要点学習　要点４

5 応用学習　ここがツボ！２乗に比例

6 応用学習　関数の文章題の完成

7 添削問題　添削問題１

8 添削問題　添削問題２

2乗に比例する関数

要点3

関数の値の変化

【1】$y=ax^2$ の値の変化

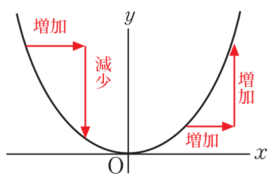
$y=ax^2$ では，x の値が増加するにつれて，y の値は次のように変化する。

① $a>0$ の場合

$x<0$ の範囲では，y の値は〔　　　　　〕する。

$x>0$ の範囲では，y の値は〔　　　　　〕する。

y は最小値＿＿＿をとる。

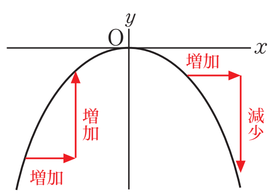


② $a<0$ の場合

$x<0$ の範囲では，y の値は〔　　　　　〕する。

$x>0$ の範囲では，y の値は〔　　　　　〕する。

y は最大値＿＿＿をとる。

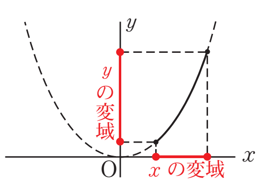


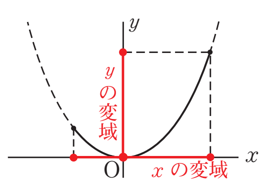
【2】x の変域と y の変域

$y=ax^2$ の x の変域に対する y の変域を求めるには，次の順序で考える。

① x の変域に対する $y=ax^2$ のグラフを x の変域の部分のみ実線でかく。

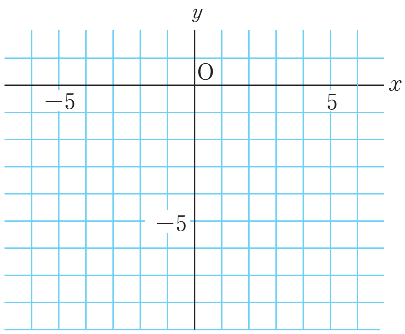
② そのグラフから，y 座標が最も大きい点と小さい点を調べて，x の変域に対する y の変域を求める。



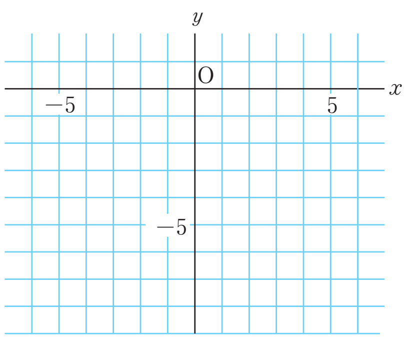


（例）　x の変域が次の(1)〜(3)のとき，関数 $y=-x^2$ のグラフをかきなさい。また，それぞれの場合の y の変域を求めなさい。

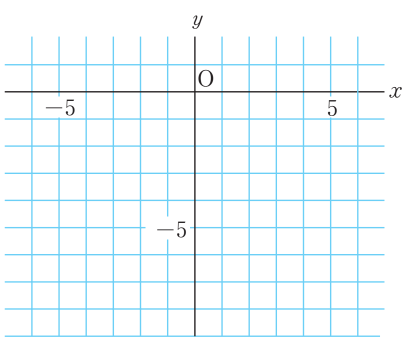
(1)　$1 \leqq x \leqq 2$



(2)　$-2 \leqq x < -1$



(3)　$-2 \leqq x < 1$



【3】$y=ax^2$ の変化の割合

$y=ax^2$ において，x が p から q まで変化するとき，y は ap^2 から aq^2 まで変化する。このとき，

x の増加量は＿＿＿＿＿＿

y の増加量は＿＿＿＿＿＿

である。そして，x が p から q まで変化したときの y の変化の割合は

＿＿＿＿＿＿＿＿

となる。

（例）　関数 $y=-2x^2$ が $x=1$ から $x=4$ まで変化するときの変化の割合と，$x=-2$ から $x=4$ まで変化するときの変化の割合をそれぞれ求めなさい。

【4】$y=ax^2$ と $y=ax+b$ の違い

（例）　関数 $y=ax^2$ と関数 $y=4x+5$ において，x が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

（例）　関数 $y=x^2$ と関数 $y=ax+b$ $(a>0)$ の，$-1 \leqq x \leqq 2$ における y の変域が等しいとき，a の値を求めなさい。

POINT

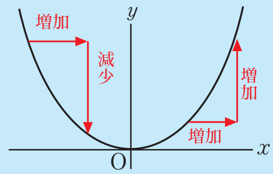
1 $y=ax^2$ の値の変化

関数 $y=ax^2$ では，x の値が増加するにつれて y の値は次のように変化する。

① $a>0$ の場合

$x<0$ の範囲で**減少**し，$x>0$ の範囲で**増加**する

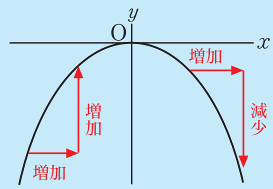
$y=0$ で**最小値 0** をとる



② $a<0$ の場合

$x<0$ の範囲で**増加**し，$x>0$ の範囲で**減少**する

$y=0$ で**最大値 0** をとる

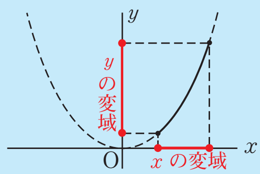


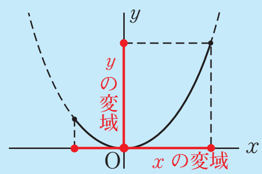
2 x の変域と y の変域

関数 $y=ax^2$ の x の変域に対する y の変域を求めるためには，次の順序で考える。

① x の変域に対する $y=ax^2$ のグラフを x の変域の部分のみ実線でかく

② そのグラフから，y 座標が最も大きい点と小さい点を調べて，x の変域に対する y の変域を求める





3 $y=ax^2$ の変化の割合

$y=ax^2$ において x が p から q まで変化するとき

x の増加量は $q-p$

y の増加量は aq^2-ap^2

変化の割合は $\dfrac{aq^2-ap^2}{q-p}$

である。

(MEMO)

確認問題

今回は

・関数の値の変化

について学習しました。学習内容をまとめておきますので，問題を解く前に確認しておきましょう。

◆関数の値の変化

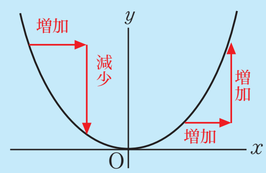
1 $y=ax^2$ の値の変化

関数 $y=ax^2$ では，x の値が増加するにつれて y の値は次のように変化する。

① $a>0$ の場合

$x<0$ の範囲で減少し，$x>0$ の範囲で増加する

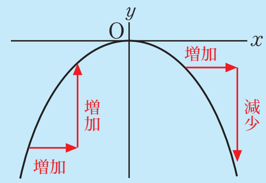
$y=0$ で最小値 0 をとる



② $a<0$ の場合

$x<0$ の範囲で増加し，$x>0$ の範囲で減少する

$y=0$ で最大値 0 をとる

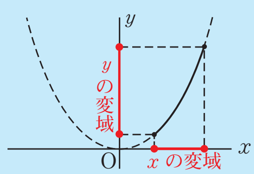


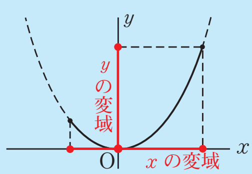
2 x の変域と y の変域

関数 $y=ax^2$ の x の変域に対する y の変域を求めるには，次の順序で考える。

① x の変域に対する $y=ax^2$ のグラフを x の変域の部分のみ実線でかく

② そのグラフから，y 座標が最も大きい点と小さい点を調べて，x の変域に対する y の変域を求める





3 $y=ax^2$ の変化の割合

$y=ax^2$ において x が p から q まで変化するとき

x の増加量は $q-p$

y の増加量は aq^2-ap^2

変化の割合は $\dfrac{aq^2-ap^2}{q-p}$

である。

それでは，次のページから始まる問題に取り組みましょう。

$\boxed{1}$

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ におけるxの変域が $-2\leqq x\leqq 3$ のとき，yの変域を求めなさい。

$\boxed{2}$

関数 $y=2x^2$ におけるxの変域が $-1<x\leqq 2$ のとき，yの変域を求めなさい。

$\boxed{3}$

関数 $y=-x^2$ におけるxの変域が $x\geqq 1$ のとき，yの変域を求めなさい。

$\boxed{4}$

関数 $y=-2x^2$ について，xの値が $x=1$ から $x=3$ まで変化するときの変化の割合を求めなさい。

$\boxed{5}$

関数 $y=-9x^2$ について，xの値が $x=-1$ から $x=4$ まで変化するときの変化の割合を求めなさい。

$\boxed{6}$

関数 $y=ax^2$ について，xの値が $x=-2$ から $x=4$ まで変化するときの変化の割合が 6 であるとき，aの値を求めなさい。

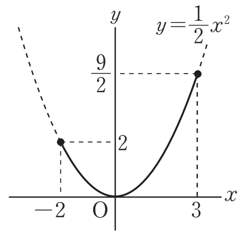
$\boxed{7}$

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ と関数 $y=ax+b$（$a>0$）の，$2\leqq x\leqq 6$ におけるyの変域が等しいとき，a，bの値を求めなさい。

確認問題の解答

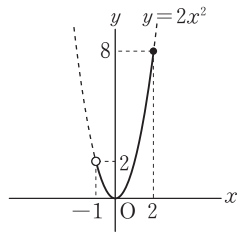
1 $0 \leqq y \leqq \frac{9}{2}$

右のグラフより明らか。



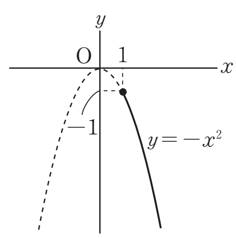
2 $0 \leqq y \leqq 8$

右のグラフより明らか。



3 $y \leqq -1$

右のグラフより明らか。



4 -8

$x=1$ のとき $y=-2$，$x=3$ のとき $y=-18$ より，変化の割合は

$$\frac{-18-(-2)}{3-1}=\frac{-16}{2}=-8$$

$\boxed{5}$ **-27**

$x=-1$ のとき $y=-9$，$x=4$ のとき $y=-144$ より，変化の割合は

$$\frac{-144-(-9)}{4-(-1)}=\frac{-135}{5}=-27$$

$\boxed{6}$ **$a=3$**

$x=-2$ のとき $y=4a$，$x=4$ のとき $y=16a$ より，変化の割合は

$$\frac{16a-4a}{4-(-2)}=\frac{12a}{6}=2a$$

よって

$$2a=6$$
$$a=3$$

$\boxed{7}$ **$a=4$，$b=-6$**

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ において，yの変域は $2\leqq y\leqq 18$ であるから

$$2=2a+b,\ 18=6a+b$$

より

$$a=4,\ b=-6$$

6 応用学習 2乗に比例する関数 関数の文章題の完成

30分

2乗に比例する関数の間違いやすいポイントはきちんと理解できましたか？「1次関数」を学習したときにも，関数を利用した文章題を学習しましたが，今回は関数の文章題を解いてみましょう。「2乗に比例する関数」などを利用する文章題の集大成ともいえる内容です。じっくり取り組んでいきましょう。

解法の研究

【1】動点問題

動点問題とは，四角形などの図形のまわりを，点が動く問題です。「1次関数」でも解いたことがありますが，「2乗に比例する関数」を学習したことで，少し難度が高い問題にもチャレンジできます。問題文をきちんと読んで

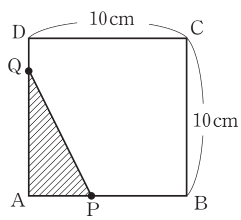
・状況の変化など，情報を正確に読み取る。

・必要に応じて場合分けして考える。

この2つを守れば，きちんと正解を導くことができます。

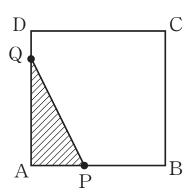
例題

右の図のような1辺の長さが10cmの正方形ABCDがある。2点P，Qは同時に頂点Aを出発し，点Pは毎秒1cmの速さで辺AB上を頂点Bまで動き，点Qは毎秒2cmの速さで辺AD，DC上を頂点Cまで動く。2点P，Qが頂点Aを出発してからx秒後の△APQの面積を$y$cm^{2}とするとき，yをxの式で表しなさい。ただし，0秒後の△APQの面積は0cm^{2}とする。

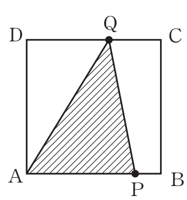


考え方

この問題では，$0 \leqq x \leqq 5$ の場合と $5 \leqq x \leqq 10$ の場合で，図形の特徴が変わるので，この2つの場合に分けて，xとyの関係を調べます。



$(0 \leqq x \leqq 5)$



$(5 \leqq x \leqq 10)$

$0 \leqq x \leqq 5$ のとき，点Qは辺AD上にあり

$$\triangle \mathrm{APQ} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AP} \times \mathrm{AQ}$$

になる。

$5 \leqq x \leqq 10$ のとき，点Qは辺DC上にあり，△APQの底辺をAPとすると，高さはつねに一定で，辺ADの長さに等しい。

解答

$0 \leqq x \leqq 5$ のとき，点Qは辺AD上にあり，$\mathrm{AP} = x\,\mathrm{cm}$，$\mathrm{AQ} = 2x\,\mathrm{cm}$ より

$$y = \frac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$$

$5 \leqq x \leqq 10$ のとき，点Qは辺DC上にあり，$\mathrm{AP} = x\,\mathrm{cm}$，APを底辺としたときの高さは10cmより

$$y = \frac{1}{2} \times x \times 10 = 5x$$

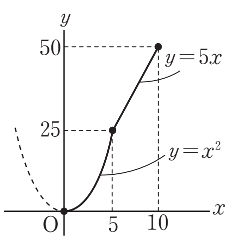
以上より

$0 \leqq x \leqq 5$ のとき，$y = x^2$
$5 \leqq x \leqq 10$ のとき，$y = 5x$　（答）

解説

$x = 5$ のとき，すなわち，点Qが頂点Dにあるとき，点Qは辺AD上，辺DC上のどちらにもあるといえるので，どちらの場合にふくめて考えても構いません。式の形は異なりますが，$x = 5$ をどちらの式に代入しても，yの値は等しくなります。

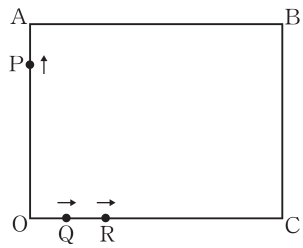
また，グラフをかくと右の図のようになります。点(5，25)は，2つのグラフ上にあることがわかりますね。



問題演習

解答は６回目の最後

1



右の図の長方形OABCにおいて，OA＝12cm，OC＝16cmである。いま，3点P，Q，Rが頂点Oを同時に出発し，次の条件に従って長方形の辺上を動く。

① 点Pは毎秒4cmの速さで辺OA，辺ABの順に動く。

② 点Qは毎秒1cm，点Rは毎秒2cmの速さで辺OC上を動く。

3点が頂点Oを出発してからt秒後の△PQRの面積をS cm^{2}とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，0秒後の△PQRの面積は$S=0$とする。

(1) 点Pが頂点Aに到達するのは何秒後ですか。

(2) $0 \leqq t \leqq 7$ のとき，Sをtの式で表しなさい。

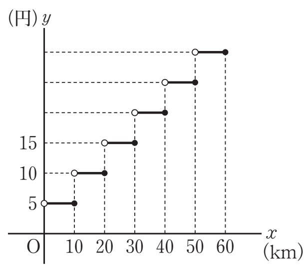
解法の研究

【2】いろいろな関数

次に，私たちの身の回りにある関数をグラフに表した問題を解いてみましょう。この問題は電話の通話料金に関する問題ですが，他にも荷物の重さと送料や電気の使用量と料金など，さまざまな関数をグラフにかくことができます。比例でも反比例でも2乗に比例する関数でもないグラフです。どんなふうにグラフから情報を得ればよいのか，さっそく例題で確認してみましょう。

例題

ある通信会社の固定電話の通話料金は，通話する2地点間の距離と時間をもとに，右のグラフを使って計算されます。このグラフは，通話する2地点間の距離$x$kmと，1分あたりの通話料金y円の関係を表しています。



右のグラフの○が，すべて直線$y=ax+b$ 上にあるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　25kmはなれた2地点間で通話するとき，1分あたりの通話料金はいくらか求めなさい。

(2)　a，bの値を求めなさい。

(3)　55kmはなれた2地点間で通話するとき，1分あたりの通話料金はいくらか求めなさい。

考え方

グラフから，通話距離(x軸)と通話料金(y軸)の関係を読み取ります。●はその点をふくみ，○はその点をふくまないことを表します。たとえば，通話距離が10km以下のとき，1分あたりの通話料金は5円となります。

解答

(1)　グラフより，**15円　(答)**

(2)　直線 $y=ax+b$ の切片は 5 より，$b=5$ であり，点(10，10)を通るから

$$10=10a+5$$

$$a=\frac{1}{2}$$

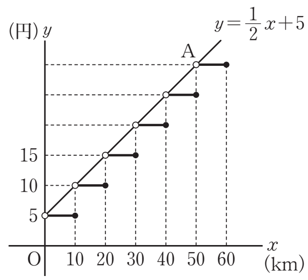
よって，$a=\frac{1}{2}$，　$b=5$　（答）

(3)　右の図の点 A の座標を考える。

(2)で求めた $y=\frac{1}{2}x+5$ に，$x=50$ を代入すると

$$y=\frac{1}{2}\times 50+5=30$$

より，A の座標は(50，30)とわかる。



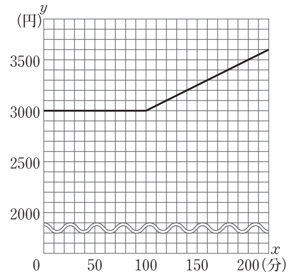
よって，55 km 離れた 2 地点間で通話するときの 1 分あたりの通話料金は 30 円　（答）

問題演習

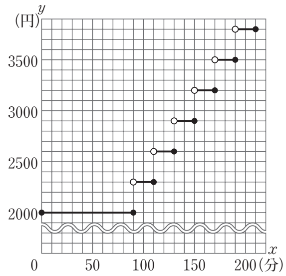
解答は６回目の最後

2　ある電話会社の料金プランには，Aプランと Z プランの２種類がある。次の２つのグラフは，各プランの１カ月の通話時間を x 分，その月の電話料金を y 円としたときの x と y の関係を表したグラフである。このとき，次の問いに答えなさい。

Aプラン



Zプラン



(1)　Aプランにおいて，１カ月の通話時間が135分のとき，その月の電話料金を求めなさい。

(2)　Z プランにおいて，１カ月の電話料金が2900円となるときの x の値の範囲を求めなさい。

(3)　$0 \leqq x \leqq 210$ において，Aプランの方が Z プランより１カ月の電話料金が安くなる x の値の範囲を求めなさい。

問題演習の解答

1

(1)　$12 \div 4 = 3$(秒後)　(答)

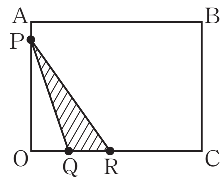
(2)　点Pが辺OAを動くときのtの変域は

$$0 \leqq t \leqq 3$$

このとき

$$OP = 4t,\quad OQ = t,\quad OR = 2t$$

であり，点Q，Rはともに辺OC上にある。



よって

$$S = \frac{1}{2} \times (OR - OQ) \times OP$$

$$= \frac{1}{2} \times (2t - t) \times 4t$$

$$= 2t^2$$

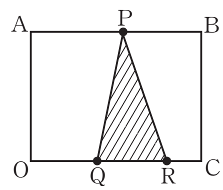
点Pが辺AB上を動くときのtの変域は

$$(12 + 16) \div 4 = 7(\text{秒})$$

より

$$3 \leqq t \leqq 7$$

であり，点Q，Rは辺OC上にある。



よって，

$$S = \frac{1}{2} \times (OR - OQ) \times OA$$

← 底辺をQRとみると，高さはOAに等しい。

$$= \frac{1}{2} \times (2t - t) \times 12$$

$$= 6t$$

以上より，$0 \leqq t \leqq 3$ のとき，$S = 2t^2$，　$3 \leqq t \leqq 7$ のとき，$S = 6t$　(答)

$\boxed{2}$

(1)　Aプランのグラフは，$x \geqq 100$ のとき，2点$(100,\ 3000)$，$(200,\ 3500)$を通るので，Aプランのグラフの式を $y=ax+b$（a，bは定数）とおくと

$$3000=100a+b \quad \cdots\cdots ①$$
$$3500=200a+b \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を連立させて，$a=5$，$b=2500$

よって，$x \geqq 100$ におけるAプランのグラフの式は

$$y=5x+2500$$

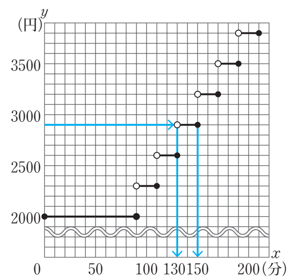
したがって，1カ月の通話時間が135分のときの電話料金は

$y=5\times135+2500=$ **3175(円)**　**(答)**

(2)　Zプランのグラフにおいて，$y=2900$ のときのxの値の範囲を調べればよい。

よって

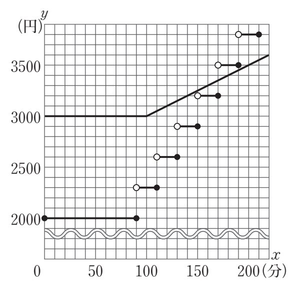
$130<x\leqq150$　**(答)**



(3)　ZプランのグラフにAプランのグラフを重ねると右の図のようになる。右の図よりAプランの方がZプランより1カ月の電話料金が安くなるのは170分を超えたときである。

したがって，求めるxの値の範囲は

$170<x\leqq210$　**(答)**



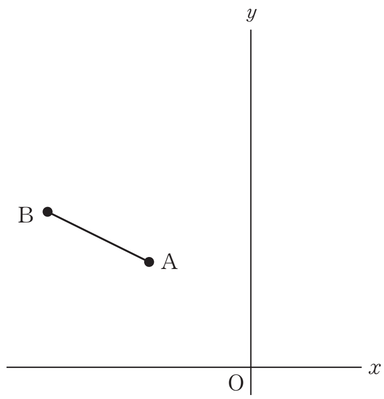
8 2乗に比例する関数
添削問題２

30分

※ここからは『Z Study　解答用紙編』の数学「２乗に比例する関数」２枚目にご記入ください。

3 次の各問いに答えなさい。（配点　25）

(1) 右の図のように，２点A$(-2,\ 2)$，B$(-4,\ 3)$がある。関数 $y=ax^2$ のグラフが線分AB（両端をふくむ）と交わるとき，aの値の範囲を不等号を使って表しなさい。（８点）



(2) 関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ と関数 $y=2x+1$ において，xの値がkから５まで変化するときの変化の割合は等しくなるという。このとき，kの値を求めなさい。ただし $k\neq5$ とする。（８点）

(3) 関数 $y=ax^2$ について，xの変域が $-1\leqq x\leqq 2$ のとき，yの変域が $-1\leqq y\leqq 0$ となるような定数aの値を求めなさい。（９点）

4 値段のつけ方が異なる２つのケーキ店，セリシールとポプランがある。ケーキの直径を$x$cm，ケーキの値段をy円とするとき，セリシールでは，yはxの１次関数になっていて，ポプランでは，yはxの２乗に比例する関数になっている。セリシールでは，直径10cmのケーキは2500円，直径14cmのケーキは3100円で売られていた。その同じ日，ポプランの直径14cmのケーキは1960円で売られていた。$x>0$ かつ消費税を考えないとき，次の問いに答えなさい。

（配点　25）

⑴　２つの店について，yをxの式でそれぞれ表しなさい。（８点）

⑵　２つの店のケーキの値段が等しくなるようなケーキの直径を求めなさい。（８点）

⑶　⑵で求めたケーキの直径を超えると，値段の差が急激に大きくなっていく。それはなぜか，「変化の割合」「一定」の言葉を使って説明しなさい。（９点）

会員番号

QR コードで個別管理しているため氏名の記入は不要です。

解 答 用 紙

禁無断転載　Z-KAI

この答案の添削有効期限は　　　　　　　　です。

※解答は、濃く、はっきりとご記入ください。

2／2枚目
CMT3E1-S1D2

総得点 34／50

2乗に比例する関数
添削問題２

3　CMT3E1-S1C3
すべて答えだけでなく考え方も示すこと。

1　8／8

(1) $(-2, 2)$ を $y = ax^2$ に代入

$2 = 4a$

$a = \frac{1}{2}$

$(-4, 3)$ を $y = ax^2$ に代入

$3 = 16a$

$a = \frac{3}{16}$

よって

$\frac{3}{16} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$

(答)　$\frac{3}{16} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$

$a>0$ のとき，a の値が大きいほど開き方が小さくなりますね。

2　8／8

(2) $y = 2x+1$ の変化の割合は

$\frac{11-(2k+1)}{5-k} = \frac{10-2k}{5-k}$

$= \frac{2(5-k)}{5-k}$

$= 2$

$y = \frac{1}{3}x^2$ の変化の割合は

$\frac{1}{3}(k+5)$

よって $\frac{1}{3}(k+5) = 2$

$k = 1$

(答)　$k = 1$

1 次関数と2 乗に比例する関数の変化の割合を用いる複雑な問題でしたが，よくできています。

1 次関数の変化の割合は，つねに一定で傾きと等しいので，すぐに2 とわかりますよ。

3　0／9

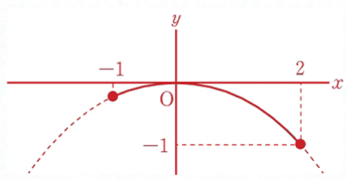
(3) $x = -1$ のとき $y = -1$ より

$-1 = a$

$a = -1$

(答)　$a = -1$

グラフは下のようになります。$y=ax^2$ に$x=2$，$y=-1$ を代入しましょう。



裏面につづく

▼解答が終わってから記入しましょう。

答案感想欄

学年 1・2・3・卒／志望校 高校

解答時間 30 分

4 (3) 何を答えればよいかわかりませんでした・・・。

難しかった問題〔 4 (3) 〕

添削者より

説明の仕方が難しかったでしょうか。2つの店のケーキの値段の「差」について答える問題ですから，セリシールのケーキの値段の変化の割合についても説明を加えるとよかったですね。「解答」の説明も参考にしつつ復習しておいてください。

添削者名 富田

---

4 CMT3E1-S1C4

4 8/8

(1) セリシール：$y=ax+b$ とかけるので

$$\begin{cases}2500=10a+b\\3100=14a+b\end{cases}$$

よって $a=150,\ b=1000$

ポプラン：$y=ax^2$ とかけるので

$1960=196a$

$a=10$

(答) セリシール：$y=150x+1000$，ポプラン：$y=10x^2$

セリシールは1次関数の式，ポプランは2乗に比例する関数の式にあてはめればいいですね。

5 7/8

(2) $y=150x+1000$ と $y=10x^2$ を連立させると

$150x+1000=10x^2$

$x^2-15x-100=0$

$(x-20)(x+5)=0$

$x=20,\ -5$

$x>0$ より

$x=20$

OK

−1

直径何 cm かで答えましょう。

(答) $x=20$

(1)で求めた式を利用して y が等しくなる x の値を求めればいいですね。

6 3/9

(3) ポプランのケーキの値段の変化の割合は一定ではないから。

+3

ケーキの直径が大きくなると，変化の割合は増加することを説明しておきましょう。

この問題のポイントは，2つの店のケーキの値段を比較して，値段の差が急激に大きくなる理由を説明することでした。セリシールでは，y は x の1次関数になっているので，ケーキの直径が大きくなると変化の割合はどうなるか考えてみましょう。