【体験授業用教材】 M3JCR

本科０期１月度（Ａターム）１回目

Z会東大進学教室【体験授業用教材（抜粋版）】

理系数学Ⅲ速習

Contents

Introduction

この講座では，数学 III の微分積分を扱います．東大をはじめとする難関大を目指す生徒が，4 月から本格的な受験勉強を始められるように，基本的な[*1]計算力をつけることと，一つひとつの式の意味を正しく理解することを目標にしています．

予習

- 予習は不要です．その代わり復習をしっかりやってください．
- 不安であれば要点，例題部分を読んできてもよいと思います．
- 演習問題は授業で扱いますので，特に指示がなければ予習はしないでください．

授業

- 演習用と，板書用の 2 種類のノートを用意するとよいと思います（強制はしません）．
- 授業はかなり速いスピードで進むので，遅刻欠席はしないでください．

復習

- 授業で何を学んだか，それをどのような問題にどう使うか，それはなぜか，などを確認し，定着させるのが復習です．
- 授業で学んだことの復習は，**その週のうちに終わらせましょう**．[*2]
- 毎週の添削課題を提出してください．[*3]
- 授業を聴いただけで数学が身につくことは，100% 絶対にあり得ません．自分の手で計算をして，何度も間違えたり悩んだりしてください．わりと楽しいはずです．がんばってください．

[*1] 「簡単」という意味ではありません．基本とは，応用のための基礎，土台です．

[*2] そうでないと，やらないといけないことがどんどんたまっていきます．

[*3] 学習のペースメーカーとして，また次回の授業までに身につけなければならないことの復習として実施するものなので，提出遅れは基本的には認めません．

表記法について

- **実数の区間**.
  - † 開区間 $a < x < b$ を $(a,\ b)$ と表す.
  - † 閉区間 $a \leqq x \leqq b$ を $[a,\ b]$ と表す.
  - † 半開区間 $a \leqq x < b$，$a < c \leqq b$ をそれぞれ $[a,\ b)$，$(a,\ b]$ と表す.

- **集合の記号**.
  - † 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す.
  - † 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と表す.
  - † 正整数全体の集合を $\mathbb{Z}^+$ と表す.

- **このテキストでの約束**.

例題　その講の内容を理解するための，具体的な問題．多少難しいものも含まれます.

演習問題　その講で絶対に身につけなければいけない，基本的な計算方法.

補充問題　いずれ必要になる，やや応用的な問題．本科 0 期では，さしあたり後回しにしても差し支えありません.

添削課題　その講の内容を定着させるための宿題．少々難しいものもいくつか含まれていますが，少し時間をかけて考えてみるのもよいでしょう.

Lecture 1　数列の極限，関数の極限

1.1　数列の極限

1.1.1　数列

正の（または非負の）整数を定義域とする関数を**数列**という．n と a_n には対応関係がある．

通常，数列を表すときは

$$\{a_n\} \ : \ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように，カンマで区切って表すことが多い．

例 1.1

n と a_n の対応を表にまとめることもできる．たとえば，正整数 n に対して $a_n = 2n - 1$ と表される数列の対応は，次の表のようになる．

n	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
a_n	1	3	5	$\cdots$	$2n-1$	$\cdots$

項の数が有限個である数列を**有限数列**，どこまでも続く数列を**無限数列**という．

1.1.2　無限大

$n \to \infty$ とは，

$$\underline{n \text{ を限りなく大きくするという操作}}$$

を表す．[*1]

$n \to \infty$ のとき，無限数列 $\{a_n\}$ がどのようになるかを考える．

1.1.3　収束・発散

$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が有限確定値 α に限りなく近づくことを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す．α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**といい，このとき数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**という．

また，$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が限りなく大きくなることを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

[*1] 大きい数を 1 つ想像してください．n を，その数より大きくすることができます（自然数にはいくらでも大きい数が存在します．そのように n をどんどん大きくするということを，$n \to \infty$ と表します．

さらに数列 $\{a_n\}$ が負の値をとり，かつその絶対値が限りなく大きくなることを，

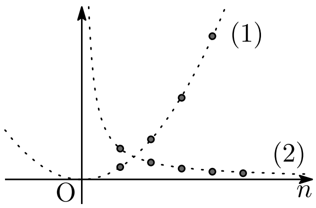
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と表す．数列が収束しないとき，**発散する**という．

例 1.2

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

これらの数列のグラフは次のようになる．



数列という関数の定義域は整数であるから，そのグラフは点々と並ぶ，不連続なグラフとなる．

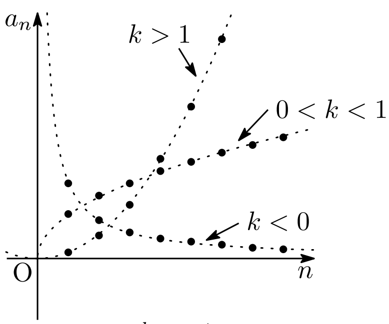
1.1.4　重要な数列の極限

公式

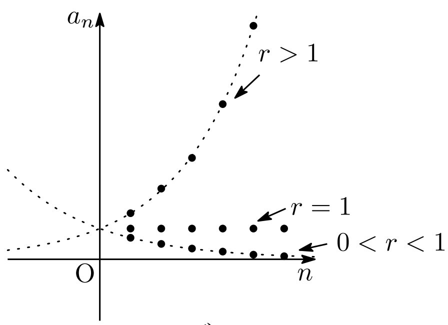
$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} \infty & (k>0 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=0 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<0 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r=1 \text{ のとき}) \\ 0 & (-1<r<1 \text{ のとき}) \\ \text{発散（振動）} & (r \leqq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例 1.3

$a_n = n^k$，$a_n = r^n$ のグラフは下図のようになる．

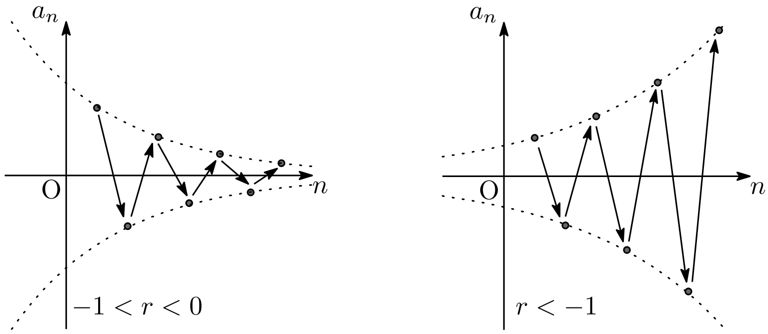


$a_n = n^k$ のグラフ



$a_n = r^n$ のグラフ

また，$r<0$ のときの $a_n=r^n$ のグラフは次のようになる．



左は 0 に収束，右は振動しながら絶対値が限りなく大きくなる．

例題 $1-1$

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}$.　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n$.　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^n$.

解答・解説

それぞれの数列のグラフを考えて，次の結果を納得せよ．

(1) $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty. \qquad (\textbf{答})$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=n^{-\frac{1}{3}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0. \qquad (\textbf{答})$$

(3) $2>1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty. \qquad (\textbf{答})$$

(4) $\pi^2<3.15^2<10$ より $\pi<\sqrt{10}$. よって $0<\dfrac{\pi}{\sqrt{10}}<1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^n=0. \qquad (\textbf{答})$$

数列の極限に関する性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が**収束し**，それぞれの極限値が α，β である，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

のとき，次が成り立つ (k，l は実数の定数)．

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$，　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$，　③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$．$(\beta \fallingdotseq 0)$

逆は成り立たない．たとえば，$\{a_n - b_n\}$ が収束しても，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束するとは限らない．

注意 1.4

たとえば，

$$a_n = n, \quad b_n = n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という 2 つの数列を考える．

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

であるが，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに $+\infty$ に発散する．

2 つの数列が**有限確定値に収束する場合に限り**，数列の四則演算および定数倍は，極限の四則演算および定数倍であるとしてよい．

例題 $1-2$

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して，

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という関係が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の収束・発散について，理由とともに述べよ．

(2)　$\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき，$\{b_n\}$ の収束・発散について理由とともに述べよ．

解答・解説

(1)　たとえば，数列 $\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき，$b_n = a_n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ で，

$$\underline{\{a_n\},\ \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\ \text{はともに有限確定値に収束するから，}}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\} = \lim_{n\to\infty}\left\{a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \alpha - 0 = \alpha$$

となり，$\{b_n\}$ も $\{a_n\}$ と同じ有限確定値 α に収束する．

ところが，たとえば

$$a_n = n, \quad b_n = n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

などという場合は，$\{a_n - b_n\}$ は 0 に収束するが，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに発散する．

以上より，この 2 つの数列の収束・発散については，なにも分からない． (**答**)

(2) (1) の議論から，$\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき $\{b_n\}$ も有限確定値 α に収束する．

(**答**)

1.1.5 無限大は「数」ではない

∞ を「数」のように扱ってはならない．たとえば次のような書き方はしない．

> **間違った例 1.5**
> (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = 2^\infty = \infty.$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

正しくは，

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

となる．繰り返し書くが，∞ とは，「n を限りなく大きくする」という操作 のことである．数学の答案の中で ∞ が現れるのは，lim の下と，極限として得られた結果の部分だけである．[*2]

例題 $1-3$

次の数列の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n-10}{6n+5}.$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n^2+5n+1}.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^{n+2}}{3^n-2^n}.$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{2^{2n+3}}.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n}-n\right).$

---

*2 $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty \\ \uparrow ここと}} a_n = \infty.$ (←ここ)

解答・解説

与えられた n に関する分数式が，$n \to \infty$ のとき，分母も分子も限りなく大きくなることがある．このとき極限値がどうなるかは，与えられた式によって変わる．このような形式を，「$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形」[*3] という．このタイプの不定形を解消するには，分母の**主要項**（$n \to \infty$ で最も発散の速い項）で分母・分子を割るとよい．

また，$\{a_n - b_n\}$ の形の数列で，$n \to \infty$ のとき $\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ も限りなく大きくなるようなものがある．「$\infty - \infty$ の不定形」という．このようなタイプの不定形を解消するために，「分子を有理化」するという方法がある．

(1) $n \to \infty$ における分母の主要項は n であるから，分母と分子を n で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{3n-10}{6n+5} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{10}{n}}{6+\frac{5}{n}} \\ &= \frac{3-0}{6+0} = \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) $n \to \infty$ における分母の主要項は n^2 であるから，分母と分子を n^2 で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n^2+5n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &= +\infty. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

> **注意 1.6**
> 正の無限大 ∞ を $+\infty$ と表すこともある．符号を強調するときなどに用いる．

(3) $n \to \infty$ における分母の主要項は 3^n であるから，分母と分子を 3^n で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^{n+2}}{3^n-2^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+2^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{3+0}{1-0} = 3. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(4) $n \to \infty$ における分母の主要項は $2^{2n} = 4^n$ であるから，分母と分子を 4^n で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{2^{2n+3}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2^3} \\ &= \frac{1+0}{2^3} = \frac{1}{8}. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

[*3] 1.1.5 で書いたように，∞ は数ではありませんので，このような書き方は本当は正しくありません．

(5)　まず，与式の分母と分子に $\sqrt{n^2-2n}+n$ をかけると

$$\sqrt{n^2-2n}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2-2n}+n} = \frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$$

このとき $n\to\infty$ における分母の主要項は n であるから，分母・分子を n で割って，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1}\\ &= \frac{-2}{\sqrt{1-0}+1} = -1. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

1.2　関数の極限

1.2.1　定義

関数の極限

「x を，a とは異なる値として，どのように a に近づけても，$f(x)$ が有限確定値 α に近づく」ことを次のように書く．

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

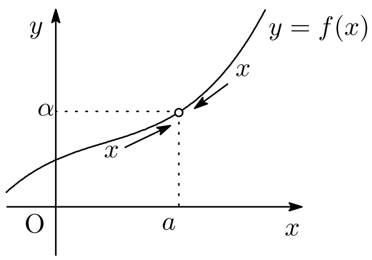
また，

$$x\to a \text{ のとき } f(x) \to \alpha \quad \text{あるいは} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha$$

とも書く．この値 α を，

$x\to a$　のときの $f(x)$ の極限値

という．このとき $f(x)$ は α に**収束する**という．



例 1.7

(1)　関数 $y=2x$ において，$x\to 3$ のとき $2x\to 6$ であるから，

$$\lim_{x\to 3} 2x = 6.$$

(2)　数学 II で学んだように，多項式 $f(x)=x^2+2x$ において

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1^2+2\cdot 1 = 3$$

である．この値は $f(1)$ と等しい．

$x=a$ における $f(x)$ の値が定義されていなくても，極限は存在する場合がある．

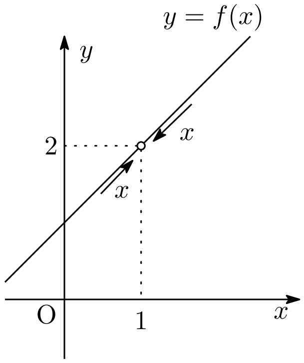
例 1.8

たとえば，関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \fallingdotseq 1) \\ \text{なし} & (x=1) \end{cases}$$

であり，$x=1$ で $f(x)$ は定義されないが，$x\to 1$ における極限値は存在して，

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$



数列の極限の計算と同様に，収束する関数の四則演算および定数倍の極限は，極限の四則演算および定数倍に等しい．次が成り立つ．

極限の性質

$x=a$ を含む区間で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ に対し，$x\to a$ のとき $f(x)$，$g(x)$ が有限確定値に収束する，すなわち

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\quad \lim_{x\to a} g(x)=\beta$$

であるとき，次が成り立つ．

① $\displaystyle\lim_{x\to a}\{kf(x)+lg(x)\}=k\alpha+l\beta,$

② $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta,$

③ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}.\quad(\beta\fallingdotseq 0)$

1.2.2　発散

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるとする．このとき $f(x)$ は**正の無限大に発散する**といい，

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

または

$$x\to a \text{ のとき } f(x)\to\infty \quad \text{あるいは} \quad f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\infty$$

などと書く．（∞ を $+\infty$ とも書く）

また，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が負で，絶対値が限りなく大きくなるとする．このとき $f(x)$ は**負の無限大に発散する**といい，

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

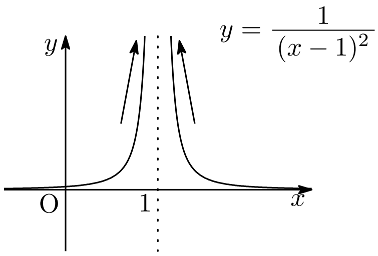
または

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to -\infty \quad \text{あるいは} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$$

などと書く．

例 1.9

たとえば，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ である．下図を参考にせよ．



1.2.3 片側極限

x が $x > a$ をみたしながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が α に限りなく近づくとする．このとき，α を x が a に近づくときの $f(x)$ の**右側極限**といい，

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$$

と表す．同様に**左側極限**も定義され，

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$

と表される．

右極限と左極限が存在しても一致しないとき，$x \to a$ における**極限は存在しない**という．

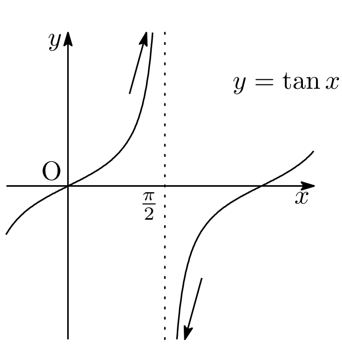
例 1.10

関数 $y = \tan x$ に対して，x が $\dfrac{\pi}{2}$ に近づくときの左極限は

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \tan x = +\infty$$

また右極限は

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$$



すなわち，$\tan x$ の $x \to \dfrac{\pi}{2}$ における極限はない．
グラフを参考にせよ．

$a = 0$ のとき，x が左から 0 に近づくこと，右から 0 に近づくことをそれぞれ

$$x \to -0, \quad x \to +0$$

と表す．

1.2.4 $x \to \infty$，$x \to -\infty$ における極限

x が限りなく大きくなるとき，$f(x)$ が有限確定値 α に限りなく近づくとき，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{とか} \qquad x \to \infty \text{ のとき } f(x) \ \to \ \alpha$$

などと表す．$x \to -\infty$ における極限も，同様に定義される．[*4]

例 1.11

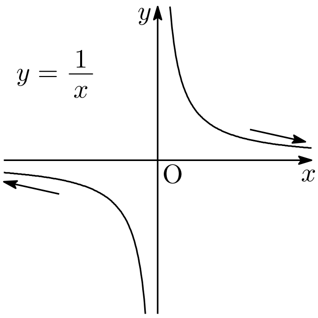
関数 $y = \dfrac{1}{x}$ について，

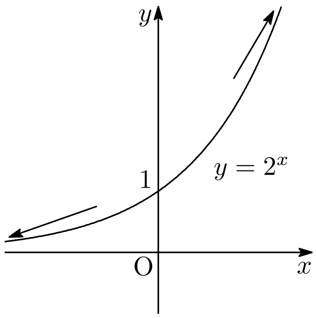
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

また関数 $y = 2^x$ について，

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$

である．





[*4] $|x| \to \infty$ における極限や，$|f(x)| \to \infty$ となる場合の極限を調べることによって，$y = f(x)$ のグラフの大局的な性質を調べることができる．

例題 $1-4$

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$.　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+3}{5x^3+6x-2}$.　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$.　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-5+0}\frac{x+2}{x^2+2x-15}$.　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

解答・解説

(1) 「$\dfrac{0}{0}$ の不定形」[*5] と呼ばれる形である．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)\\ &= 2^2+2\cdot 2+4\\ &= 12. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) これも「$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形」 と呼ばれる．数列の場合と異なるのは，x は実数の値をとりながら限りなく大きくなるということである．とはいえ，扱い方はあまり変わらない．

$x\to\infty$ における分母の主要項は $5x^3$ であるから，分母と分子を x^3 で割ると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+3}{5x^3+6x-2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{5+\frac{6}{x^2}-\frac{2}{x^3}}\\ &= \frac{2+0+0}{5+0+0}\\ &= \frac{2}{5}. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3) これも「$\dfrac{0}{0}$ の不定形」である．分子を有理化すると，不定形が解消される．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7})^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\\ &= \frac{1}{6}. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

[*5] このような書き方はもちろん正しくありません．

(4)　$x<0$ であるから考えづらい．$t=-x$ とおくと

$$x \to -\infty \quad \text{のとき} \quad t \to \infty$$

で，与式は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-t}\right)^2-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t} = \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}.\end{aligned}$$

分母の主要項は t であるから，分母と分子を t で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t} &= \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}\\ &= -\frac{1}{2}. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

間違った解答 1.12

次の解答の，どこが間違っているのか指摘せよ．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} = -\infty. \qquad \textbf{(間違い)}\end{aligned}$$

(5)　分母は

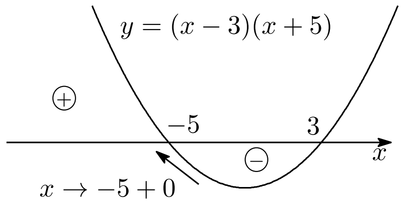
$$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$$

となり，$x\to-5+0$ のとき，$x+5$ は正の値をとりながら 0 に近づく．また $x-3\to-8$ であるから結局，分母は負の値をとりながら 0 に近づく．さらに分子は $x+2\to-3$ であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-5+0}\frac{x+2}{x^2+2x-15} &= \lim_{x\to-5+0}\frac{x+2}{(x-3)(x+5)}\\ &= +\infty. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

注意 1.13

片側極限には気をつけること．分母のグラフは次のようになる．



たとえば，次のような雑なことをしないように．

間違った解答 1.14

x が 5 に近づくとき，分母は 0 に，分子は -3 に近づくから，

$$\lim_{x\to -5+0} \frac{x+2}{x^2+2x-15} = -\infty. \quad \textbf{(間違い)}. \qquad (\textbf{答})$$

(6)　x の符号で場合を分ける．$x \fallingdotseq 0$ のとき

$$|x| = \begin{cases} x & (x>0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

であるから，右側極限は

$$\lim_{x\to +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

また左側極限は

$$\lim_{x\to -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to -0} \frac{-x}{x} = -1.$$

右側極限と左側極限が一致しないので，極限はない．　(**答**)

1.3 無限級数

1.3.1 いくつかの定義

無限数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

において，各項を順に記号 $+$ で結んで得られる式[*6]

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \cdots (*)$$

を**無限級数**といい，a_1 を**初項**，a_n を**第 n 項**という．

無限級数 $(*)$ において，初項から第 n 項までの和[*7]

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

をこの無限級数の**第 n 部分和**という．第 n 部分和 S_n は正整数を定義域とする関数であるから，すなわち数列である．

1.3.2　収束，発散

無限級数の収束

第 n 部分和の作る数列 $\{S_n\}$ が，有限確定値 S に収束する．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

が成り立つとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は値 S に**収束する**という．

S をこの無限級数の**和**といい，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

とも書く．無限級数が収束しないとき**発散する**という．

無限級数の和に関する性質

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が**収束して**，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ のとき，k，l を定数として

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + lb_n) = kS + lT$$

[*6] なぜ「和」という言葉を使わないのでしょうか？

[*7] ここでは「和」という言葉を使っています．上との違いはなんでしょうか？

注意 1.15

有限個の和の場合と同様に，当然，積および商に対しては成立しない．すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \fallingdotseq ST, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \fallingdotseq \frac{S}{T}$$

である．

1.3.3 無限級数が収束するとき

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して，第 n 部分和を S_n とすると ($n \to \infty$ より $n \geqq 2$ としてよい),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n$$

すなわち

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \cdots (\natural)$$

ここで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が値 S に**収束するとき**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

であるから，$(\natural)$ において $n \to \infty$ として

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

ゆえに次が成り立つ．

無限級数が収束するための必要条件

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対し，次が成り立つ．

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が収束する} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

対偶をとって

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{は発散する}$$

ところで (1) の逆は成立しない．すなわち

$$\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{であっても} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{は発散することもある．}}$$

重要な反例

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ であるが，無限級数 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ は } +\infty \text{ に発散する．}$$

証明 1.16

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく．とくに $n=2^m$ の場合を考える．S_n の各項を，2^{l-1} 個ずつにまとめる．

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots\right)+\cdots$$

ここで，

$$\begin{aligned}
(1\text{ つめの括弧}) &\geqq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\
(2\text{ つめの括弧}) &\geqq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\\
(3\text{ つめの括弧}) &\geqq 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}\\
&\vdots\\
(m-1\text{ 個めの括弧}) &\geqq 2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
S_n &\geqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\\
&=1+(m-1)\cdot\frac{1}{2}\xrightarrow[m\to\infty\ (n\to\infty)]{}\infty
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty. \qquad \textbf{〔証明終〕}$$

1.3.4 無限等比級数

初項 a，公比 r の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \qquad (\#)$$

を**無限等比級数**という．

1.3.5 無限等比級数の収束，発散

(I) $a=0$ のとき．
n によらず $ar^{n-1}=0$ であるから，$(\#)=0$.

(II) $a \neq 0$ のとき．
(i) $r=1$ のとき．
n によらず $ar^{n-1}=a$ であるから，第 n 部分和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a = na$ となり発散する．

(ii) $r \neq 1$ のとき．
第 n 部分和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

であるから，S_n の収束・発散は r^n によって決まる．

・$|r|<1$ のとき，$r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ より，

$$\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

・$r \leqq -1$ または $1<r$ のとき．
数列 $\{r^n\}$ は発散するから，第 n 部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$ も発散．

以上をまとめると次のようになる．

無限等比級数の収束，発散

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ について，

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ が収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad (a=0 \quad \text{または} \quad |r|<1)$$

であり，その和は

$$\begin{cases} a=0 \quad \text{のとき} & 0, \\ |r|<1 \quad \text{のとき} & \dfrac{a}{1-r}. \end{cases}$$

である．**それ以外のとき発散する．**

例題 1 − 5

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するものは和を求めよ．

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$. (ii) $\dfrac{1}{11}+\dfrac{2}{21}+\dfrac{3}{31}+\cdots$.

(2) 次の無限級数が発散することを示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

(3) 次の無限級数が収束することを示し，その和を求めよ．

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right).$$

$\boxed{2}$ 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するものは和を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{5+2\sqrt{6}}+\cdots$

(2) $\cos^2 x+\cos^2 x\sin x+\cos^2 x\sin^2 x+\cdots$

解答・解説

$\boxed{1}$ 無限級数の収束・発散を調べるには，まず第 n 部分和が求められるかどうかを考える．

(1) (i) 第 n 部分和は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1}-1$$

より，発散する． (**答**)

(ii) 第 n 項は

$$\frac{n}{10n+1} = \frac{1}{10+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{10} \fallingdotseq 0$$

であるから，発散する． (**答**)

(2) 第 n 部分和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}\\ &= \log(n+1)-\log 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.\end{aligned}$$

ゆえに発散する. **〔証明終〕**

(3) 第 n 部分和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n}\log\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\\ &= \log\left\{\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right\}\\ &= \log\frac{2\cdot n}{1\cdot(n+1)}\\ &= \log\frac{2}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log 2.\end{aligned}$$

ゆえに，与えられた無限級数は収束して，その和は $\log 2$. (**答**)

$\boxed{2}$ 無限等比級数の収束・発散を調べるには，初項と公比の値を調べればよい.

(1) 公比

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < \frac{3.142}{1.414+1.732} = 0.9987\cdots < 1$$

であるから収束し，その和は

$$\frac{\frac{1}{\pi}}{1-\frac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\pi\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\pi\right)}. \qquad (\textbf{答})$$

(2) まず初項が 0 かどうかで場合を分ける.

(i) 初項 $\cos x = 0$ のとき，収束して，和は 0.

(ii) $\cos x \fallingdotseq 0$ のとき，公比 $\sin x \fallingdotseq \pm 1$ であるから，収束して和は $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$.

以上より，問題の無限等比級数は

$$\text{収束し，和は } \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}. \qquad (\textbf{答})$$

1.4 演習問題

演習問題 1 − 1

次の極限を計算せよ．ただし n は自然数，x は実数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-n^3}{2+n^3}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{1^3+2^3+\cdots+n^3}$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\cdots+n)^2}{n\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)}$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{2^n+3^{n+2}}$.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^n+2^{n+1}}$.

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}-\frac{n^2}{4n+1}\right)$.

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-n\right)$.

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$.

演習問題 1 − 2

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+x^2+3}{x^4+3x-2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_3(27x+5)+\log_3(9x+2)-\log_3(x^2+5x+6)\}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+6x+10}+x+3\right)$.

演習問題 1 − 3

次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{32^x-1}{8^x-1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{5}}{x-1}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x}{x^3-8}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{(x-1)^2}}$.

演習問題 $1-4$

次の問いに答えよ．

(1) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

の和を求めよ．

(2) 無限級数

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

の和を求めよ．

(3) 等比数列 $\{a_n\}$ は，

$$a_1=\frac{2}{3},\quad a_1+a_2+a_3=\frac{37}{24}$$

をみたし，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するとする．このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ．

(4) x を実数とする．無限等比級数

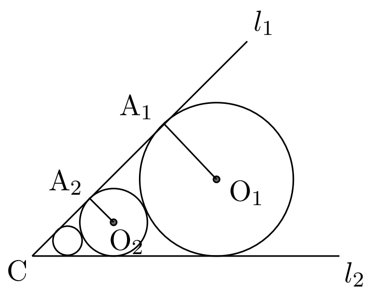
$$x+x(1-x)+x(1-x)^2+\cdots+x(1-x)^{n-1}+\cdots$$

が収束するような x の値を求めよ．またそのときの和を求めよ．

(5) 初項が $\dfrac{1}{2}$ である無限等比級数の和と，その各項を 2 乗した無限等比級数の和が等しいとき，もとの無限等比級数の公比を求めよ．

補充問題 $1-1$

図のように，円 O_1，O_2，$\cdots$ は互いに接し，かつ点 C で交わる半直線 l_1，l_2 に内接している．



(1) 円 O_1 の半径が 5，CA_1 の長さが 12 であるとき，円 O_2 の半径を求めよ．

(2) n 番目の円 O_n の半径 r_n とその面積 S_n を求めよ．

(3) (2) で求めた S_n に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の値を求めよ．

Lecture 1 添削課題

$\boxed{1}$ 次の数列の極限を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)}{3n^2+2n+1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n+3^n}$.

$\boxed{2}$ 次の関数の極限を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\log_4 x+\log_2\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)\right\}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

$\boxed{3}$ 次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束する場合には和を求めよ. ただし $0\leqq x<2\pi$ である.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos x(2\sin x-1)^{n-1}$.

(3) $-3+3-3+3-3+3-3+\cdots$.

$\boxed{4}$ 次の数列の極限を求めよ. ただし a, b は $0<a<b$ なる定数とする.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_2\left(a^n+b^n\right).$$

体験授業をご受講いただく皆さんへ

体験授業をお申し込みいただきありがとうございます。
Z会の教室の授業は、学力を効果的に上げていくためのカリキュラム・内容となっております。
次回以降もぜひ継続して受講することをおすすめします。

《体験授業後の流れ》

お申し込み方法

引き続き継続して受講される場合は、各教室窓口・お電話でお申し込みが可能です。
※体験授業終了直後に窓口で申し込んでお帰りになることもできます。
※認定が必要な講座をご希望の方はテストを受験していただく場合があります。
※予習が必要な講座は次回までの予習がありますので、余裕を持ってお申し込みください。
※本科授業は、**「クラス授業」「映像授業」「個別指導」**が選べます。「時間の都合がつかない」「授業内でわからない部分だけを学習したい」という方には**「映像授業」**を、「映像授業で学習した内容で難しかった部分をしっかりと理解したい」という方は、映像授業を受講した後で個別を指導を受けられる**「個別指導」**を、それぞれおすすめします。
※映像授業の体験も承ります。一部の講座では映像授業のご用意がありません。予めご了承ください。

通話料無料 **0120-2828-76** 月曜日～土曜日 12:00～20:00（休室日を除く）

各教室電話番号
月曜日～土曜日
14:00～21:00
（休室日を除く）

御茶ノ水教室	03-5296-2828	池袋教室	03-5985-2828
渋谷教室	03-5774-2828	横浜教室	045-313-2828
新宿教室	03-5304-2828	葛西教室	03-5878-0844

お申し込み後の流れ

お申し込みから1週間以内に手続書類（入会書類、お支払いについて、会員証など）をお送りします。
※受講料のお支払い期日が次回授業よりも後の場合でも、次回授業へのご参加は可能です。
※体験授業後にご受講いただく場合、「Z会の教室」では「月度」単位で受講料を請求させていただいているため、体験授業分も受講料をご請求する場合があります。くわしくは教室スタッフまでお問い合わせください。

→ お申し込み後、テキストを各教室窓口にてお受け取りください。

※葛西教室にて高1・高2講座・受験講座、
Z会進学教室大学受験部立川教室にて高1・高2・受験生講座を開講しております。

講座選択に迷ったら…

学習相談は随時承っています。お電話でのご相談も可能です。
受講に際して不明点、不安な点がある方は、各教室の窓口、または上記番号までお気軽にお問い合わせください。

Z会の教室の受講サポート　―万全のシステムで効果的な学習をサポートします―

1. 講師への質問

授業前後の時間や休み時間を利用して、担当講師に直接質問をすることができます。
疑問点をそのままにすることなく、その場で解消することができます。

2. 振替受講

本科のクラス授業で欠席する回の授業を、同一週・同一講座の他のクラスで振替受講することができます。他教室への振替、映像授業（教室・自宅での受講）への振替も可能です。前日までに各教室窓口、お電話にてお申し出下さい。
※振替手続は一週前の月曜から可能です。

3. 進路・学習・入試相談

各教室の学習アドバイザーが皆さんのご相談を随時承っています。

4. 自習室

本科生の方は休室日を除いて、全教室の自習室をいつでもご利用いただけます。