【体験授業用教材】 M3JSA/M3JA1/M3JA2

本科０期１月度（Ａターム）１回目

Ｚ会東大進学教室【体験授業用教材（抜粋版）】

選抜東大･医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

Contents

Part 1

数学IAIIB

Lecture 1　2 次関数，3 角・指数・対数関数

1.1　指数関数

1.1.1　指数法則，n 乗根，有理数の指数

次が成り立つ．

指数法則

$a>0$，$b>0$ と実数 x，y について，次が成り立つ．

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$
$$(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

n 乗根

n を正の整数とする．n 乗すると a になる数，すなわち

$$x^n = a$$

をみたす x を，a の n 乗根という．

例 1.1

(1) 16 の 4 乗根は 2，-2 である．
(2) 125 の 3 乗根は 5 である．

n の偶奇で n 乗根の個数が変わる．

(I) n が奇数のとき．
任意の実数 a に対して a の n 乗根のうち実数であるものはただ一つ存在する．それを $\sqrt[n]{a}$ と書く．

(II) n が偶数のとき．

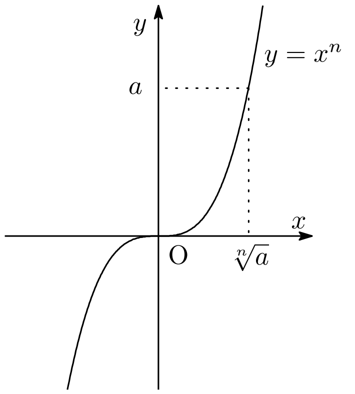
(i) $a>0$ のとき．
a の n 乗根のうち実数であるものは 2 つ存在し，そのうちの正の方を $\sqrt[n]{a}$ と書く．このとき負の方は $-\sqrt[n]{a}$ である．

(ii) $a=0$ のとき．
$\sqrt[n]{0}=0$ である．

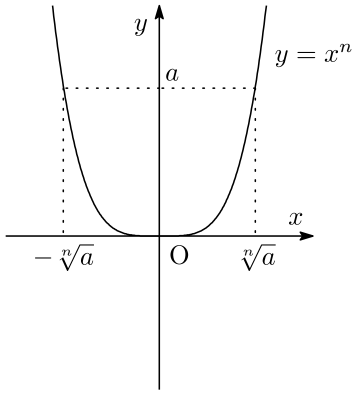
(iii) $a<0$ のとき．
a の n 乗根のうち実数であるものは存在しない．

下図を利用して確認せよ．

(i) n が奇数のとき



(ii) n が偶数のとき



有理数の指数

正の有理数 $\dfrac{m}{n}$ に対して，

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

とくに

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

例 1.2

(1) $2^{\frac{1}{3}} = x$ とおく．指数法則を用いると

$$x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 2.$$

すなわち $2^{\frac{1}{3}}$ は 2 の 3 乗根である．

(2) $2^{\frac{2}{3}} = y$ とおく．上と同様に

$$y^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{2}{3}\cdot 3} = 2^2$$

すなわち $2^{\frac{2}{3}}$ は 2^2 の 3 乗根である．

1.1.2　単調性と指数関数

単調性

関数 $f(x)$ が単調増加であるとは，次が成り立つことである．

$$p < q \quad \Longrightarrow \quad f(p) < f(q).$$

また，関数 $f(x)$ が単調減少であるとは，次が成り立つことである．

$$p < q \quad \Longrightarrow \quad f(p) > f(q).$$

注意 1.3

これらの逆も成り立つ．すなわち関数 $f(x)$ が単調増加であるとき

$$f(p) < f(q) \quad \Longrightarrow \quad p < q.$$

関数 $f(x)$ が単調減少であるとき，

$$f(p) < f(q) \quad \Longrightarrow \quad p > q.$$

指数関数

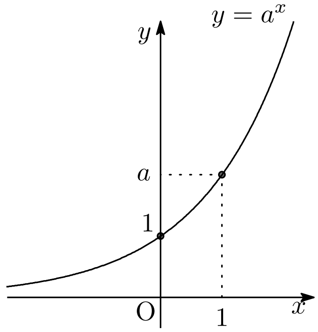
$a > 0$，$a \neq 1$ と実数 x に対して，

$$y = a^x$$

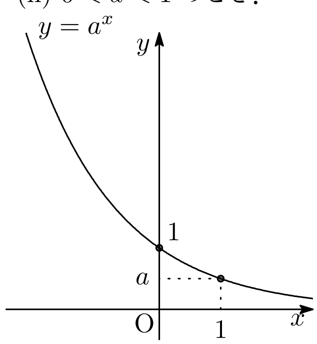
を a を底とする**指数関数**という．

指数関数 $y = a^x$ のグラフは次のようになる．

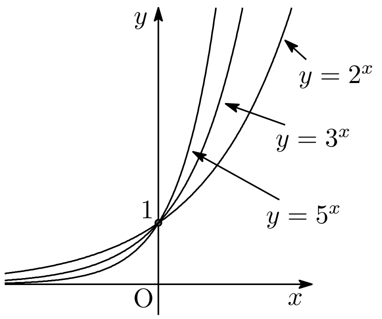
(i) $a > 1$ のとき．

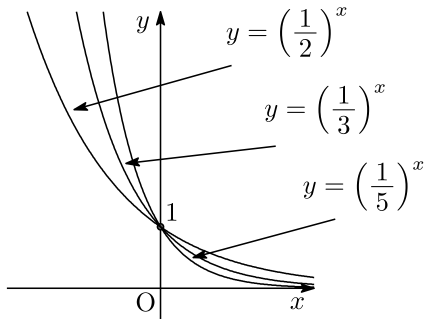


(ii) $0 < a < 1$ のとき．



いくつかの異なる底における，指数関数のグラフは下のようになる．





指数関数の性質

指数関数の性質として，次のようなものがある．

- 定義域は実数全体，値域は正の数全体である．
- グラフは 2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通り，x 軸を**漸近線**とする．
- $a > 1$ のとき**単調増加**であり，$0 < a < 1$ のとき**単調減少**である．

1.1.3 指数方程式，指数不等式

指数不等式の解法

$a > 1$ のとき，a^x は単調増加であるから

$$a^p < a^q \iff p < q.$$

また $0 < a < 1$ のとき，a^x は単調減少であるから

$$a^p < a^q \iff p > q.$$

また，指数関数 $y = a^x$ は単調増加または単調減少であるから，実数 p，q に対して

$$p \neq q \implies a^p \neq a^q$$

である．この対偶を考えることにより，

$$a^p = a^q \implies p = q$$

である．逆は明らかであるから，次が成り立つ．

指数方程式

底 a の値によらず

$$a^p = a^q \iff p = q.$$

以上を利用して指数方程式，指数不等式を解く．

1.2　対数

1.2.1　対数の定義，対数法則

a を 1 とは異なる正の実数とするとき，指数関数 $y = a^x$ のグラフから分かるように，任意の正の実数 M に対して

$$a^p = M$$

をみたす実数 p がただ 1 つ定まる．このときの p の値を，a を**底**とする M の**対数**といい，$\log_a M$ と書く．また M をこの対数の**真数**という．

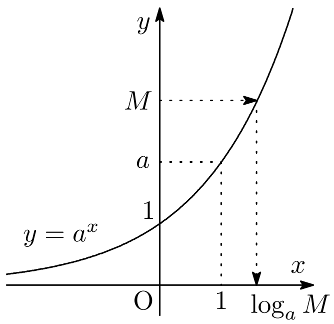
$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

指数関数のグラフより，真数 M は**正の実数である**．これを**真数条件**という．

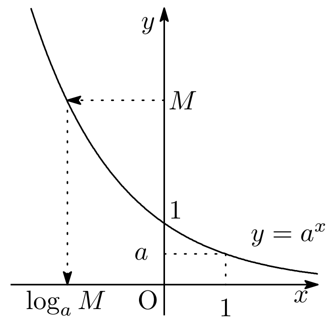
また，対数の底を a とすると，$0 < a < 1$ または $1 < a$ である．これを**底の条件**という．

下図を用いて確認せよ．

(i) $a > 1$ のとき．



(ii) $0 < a < 1$ のとき．



対数の定義

$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$ のとき，

$$a^p = M \iff p = \log_a M.$$

定義より，ただちに次が得られる．

対数の性質

$a > 0$，$a \neq 1$ のとき

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

また指数法則と対数の定義より，次の**対数法則**が成り立つ．

対数法則

$a>0$，$a \fallingdotseq 1$，$M>0$，$N>0$，p を実数とするとき

(1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^p = p \log_a M$

証明 1.4

(1) $s = \log_a M$，$t = \log_a N$ とすると，$M = a^s$，$N = a^t$.
指数法則より

$$MN = a^s a^t = a^{s+t}$$

両辺 a を底とする対数をとって

$$\log_a MN = s + t = \log_a M + \log_a N$$ **〔証明終〕**

(2) 各自示してみよ.

(3) $s = \log_a M$ とすると $M = a^s$．両辺 p 乗すると

$$M^p = (a^s)^p = a^{sp}$$

底 a の対数をとると

$$\log_a M^p = sp = p \log_a M$$ **〔証明終〕**

対数法則の特別な場合として，次が成り立つ.

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N, \quad \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M.$$

1.2.2 底の変換公式

底の変換公式

a，b，c を 1 とは異なる正の実数とするとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

特に $c = b$ とすると

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

証明 1.5

a，b，c を 1 とは異なる正の実数とする．

$$x = \log_a b, \quad y = \log_c a$$

とすると，

$$b = a^x, \quad a = c^y.$$

すなわち

$$b = (c^y)^x = c^{xy}$$

であるから

$$xy = \log_c b. \qquad \therefore \quad (\log_a b) \cdot (\log_c a) = \log_c b.$$

$a \fallingdotseq 1$ であるから，$y \fallingdotseq 0$．よって $\log_c a$ で両辺を割ると

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \qquad \text{〔証明終〕}$$

また次が成り立つ．

指数の底変換公式

a を 1 とは異なる正の実数とし，$b > 0$ とすると

$$a^{\log_a b} = b$$

証明 1.6

$p = \log_a b$ とすると $b = a^p$．

ところで $p = \log_a b$ であるから，

$$a^p = a^{\log_a b} = b \qquad \text{〔証明終〕}$$

1.3　対数関数

a を 1 とは異なる正の実数とし，任意の正の実数 x に対して

$$y = \log_a x$$

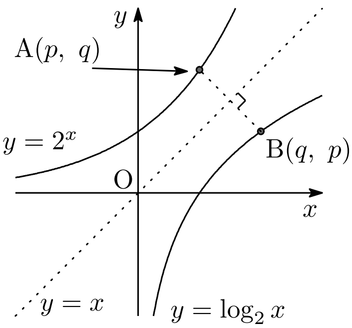
によって実数 y を対応させることができる．この関数を，a を**底**とする**対数関数**という．

1.3.1　対数関数のグラフ

p を実数とし，$q > 0$ であるとき

$$q = 2^p \iff p = \log_2 q$$

である．すなわち，点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ が $y = 2^x$ のグラフ上にあるとき，点 $\mathrm{B}(q,\ p)$ は $y = \log_2 x$ のグラフ上にある．またその逆も成り立つ．



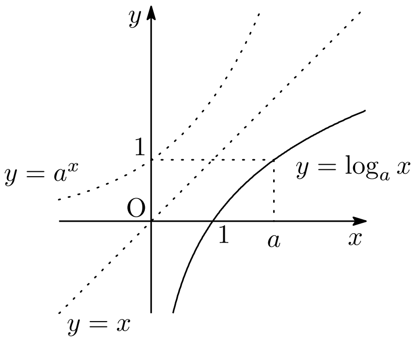
2 点 A，B は直線 $y = x$ に関して対称であるから，$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフも直線 $y = x$ に関して対称である．

一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフの概形は，次のようになる．

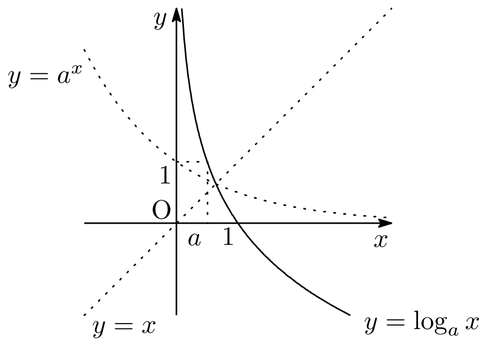
対数関数のグラフ

x を正の実数，a を 1 とは異なる正の実数とする．

(i) $a > 1$ のとき



(ii) $0 < a < 1$ のとき



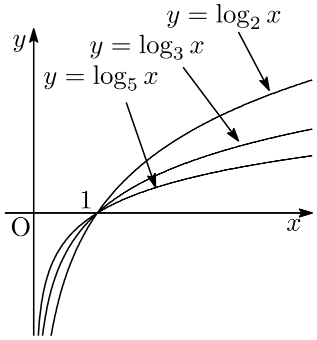
次のような性質がある．

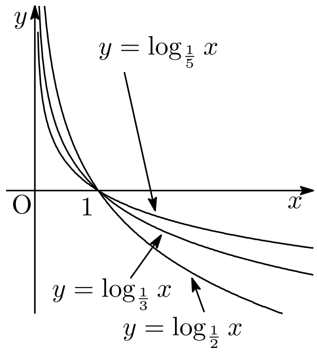
対数関数の性質

(1) 定義域は正の実数全体，値域は実数全体である．
(2) グラフは 2 点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通り，y 軸を**漸近線**とする．
(3) $a > 1$ のとき単調増加，$0 < a < 1$ のとき単調減少である．

$$a > 1 \text{ のとき,} \qquad p < q \iff \log_a p < \log_a q$$
$$0 < a < 1 \text{ のとき,} \qquad p < q \iff \log_a p > \log_a q$$

いくつかの異なる底における，対数関数のグラフは下のようになる．





1.4 3 角関数とその扱い方

1.4.1 一般角，弧度法

いくつかの定義

始線，動径，一般角，動径の表す角，弧度法．（教科書で確認すること）

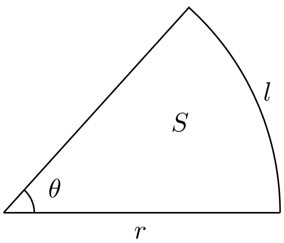
次が成り立つ．

扇形の弧長，面積

半径 r，中心角 θ の扇形の弧長 l，面積 S は

$$l = r\theta,$$
$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl.$$

と表される．



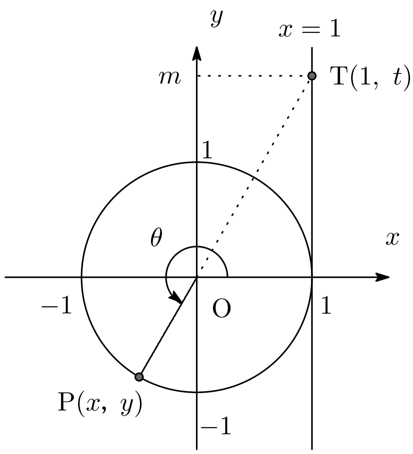
1.4.2　3 角関数

定義

θ を一般角とする．単位円周上の点 P$(x,\ y)$ に対して，動径 OP の表す角を θ とする．また直線 OP と直線 $x=1$ との交点を T$(1,\ t)$ とすると，

$$\begin{cases} \cos\theta = x \\ \sin\theta = y \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} = t \end{cases}$$

と定義する．ただし，n を整数として $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ となる θ に対して，$\tan\theta$ は定義しない．



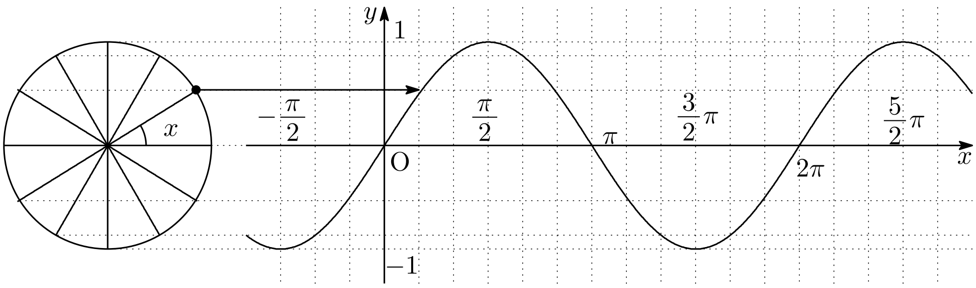
上の定義から，3 角関数の値域は次のようになる．

3 角関数の値域

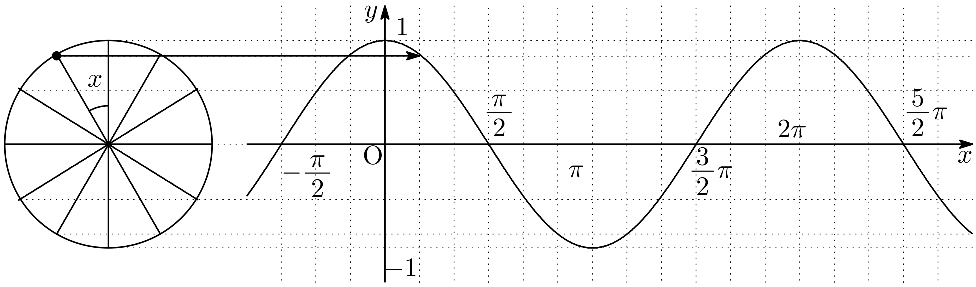
$$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1,\quad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1,\quad \tan\theta \text{ はすべての実数値をとる．}$$

1.4.3　周期性とグラフ

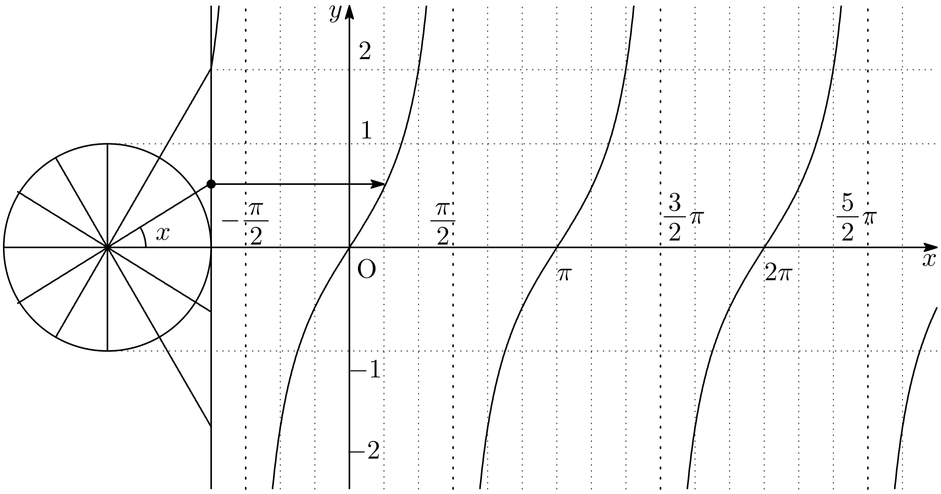
(1) $y = \sin x$ のグラフ．



(2) $y = \cos x$ のグラフ．



(3) $y = \tan x$ のグラフ．



上のグラフにおいて，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で x が増加しながら $\dfrac{\pi}{2}$ に近づいていくと，$y = \tan x$ のグラフは直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく．このように曲線が限りなく近づいていく直線を**漸近線**という．

$y = \tan x$ のグラフの漸近線は n を整数として

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

と表される．

1.4.4 周期性

定義

一般に関数 $f(x)$ において，0 でない定数 p があって

$$f(x+p)=f(x)$$

が定義域に属する任意の x に対して成り立つとき，$f(x)$ を**周期** p **の周期関数**という．

p が関数 $f(x)$ の周期であるとき，np (n は整数) も $f(x)$ の周期となるから，周期は無数にある．ゆえに関数 $f(x)$ の周期のうち，正で最小のものがあればそれを $f(x)$ の**基本周期**という．基本周期を単に周期ということもある．

すべての実数 x に対して，

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

が成り立つから，

<u>$\sin x$，$\cos x$ は周期 2π の周期関数である.</u>

また $\tan x$ において

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$$

であるから，

<u>$\tan x$ は周期 π の周期関数である.</u>

以上より，次が成り立つ．

3 角関数の性質 (2)

n を整数として

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2n\pi)=\cos x,$$
$$\tan(x+n\pi)=\tan x.$$

1.4.5 加法定理

正弦，余弦の加法定理

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

正接の加法定理

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

1.4.6 諸公式

2 倍角の公式

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x},$$
$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 x.\end{aligned}$$

半角の公式

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

3 倍角の公式

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

1.4.7 合成

3 角関数の合成

a，b は同時に 0 になることはないとする．このとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

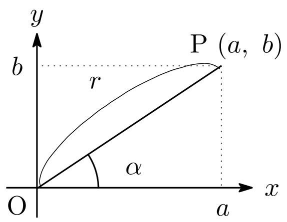
ただし α は次をみたす.

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

証明 1.7

a，b を定数とし，同時に 0 になることはないとする．右の図で，点 P$(a,\ b)$ とし，OP $= r$ とすると，

$$a = r\cos\alpha,\quad b = r\sin\alpha$$



であるから，正弦の加法定理を用いて

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \\ &= r\left(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha\right) \\ &= r\sin\left(\theta+\alpha\right) \end{aligned}$$

と変形される．ここで $r=\sqrt{a^2+b^2}$ であるから，示された． **〔証明終〕**

同じように，次が成り立つ（各自確認せよ）．

3 角関数の合成 (2)

a，b は同時に 0 になることはないとする．このとき

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha).$$

ただし α は次をみたす．

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

演習問題 $1-1$

(1) 不等式

$$a^{2x-1} - 8a^{x+1} - a^{x-2} + 8 < 0$$

をみたす x の範囲を求めよ．ただし，a は $0 < a < \dfrac{1}{2}$ なる定数とする．

(2) 不等式

$$\log_6 x + \log_6(2^k + 3^k - x) > k$$

をみたす実数 x の範囲を求めよ．ただし，k は定数とする．

演習問題 $1-2$

角 α，β，γ が $\alpha + \beta + \gamma = 180°$，$\alpha \geq 0°$，$\beta \geq 0°$，$\gamma \geq 0°$ をみたすとき

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq 1$$

を示せ．

演習問題 $1-3$

xy 平面上に単位円 $C : x^2 + y^2 = 1$ があり，C 上に異なる 3 点 P，Q，R をとる．P，Q を固定して R を動かすとき，△PQR の重心 G と原点 O との距離 OG が最大，最小となるような点 R の位置をそれぞれ求めよ．ただし，線分 PQ は C の直径にはならないものとする．

演習問題 $1-4$

y を自然数とする．このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3 + (3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ．

演習問題 $1-5$

実数 a，b に対して，

$$f(\theta) = \cos 2\theta + 2a \sin\theta - b \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(\theta) = 0$ が奇数個の解をもつときの a，b がみたす条件を求めよ．
(2) 方程式 $f(\theta) = 0$ が 4 つの異なる実数解をもつときの点 $(a,\ b)$ の存在領域を ab 平面上に図示せよ．

演習問題 $1-6$

p，q を実数とする．x の方程式

$$|\log_{10} x| = px + q$$

が相異なる 3 つの実数解をもち，次の 2 つの条件をみたすとする．

(I) 3 つの解の比は $1:2:3$ である．
(II) 3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい．

このとき，$A = \log_{10} 2$，$B = \log_{10} 3$ として，p と q を A と B を用いて表せ．

演習問題 $1-7$

次の問いに答えよ．

(1) 不等式

$$\log_x y > 0$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ．

(2) 不等式

$$\log_x y < \log_y x$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ．

Lecture 1 添削課題

放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動したところ，放物線 $y = x^2 + 2(2-a)x + 2(1-2a)$ が得られた．次の問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような a の値の範囲を求めよ．

Part 2

数学III

Lecture 1　極限・級数 (1)

1.1　数列の極限

1.1.1　数列

正の（または非負の）整数を定義域とする関数を**数列**という．n と a_n には対応関係がある．

通常，数列を表すときは

$$\{a_n\} \ : \ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように，カンマで区切って表すことが多い．

例 1.1

n と a_n の対応を表にまとめることもできる．たとえば，正整数 n に対して $a_n = 2n-1$ と表される数列の対応は，次の表のようになる．

n	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
a_n	1	3	5	$\cdots$	$2n-1$	$\cdots$

項の数が有限個である数列を**有限数列**，どこまでも続く数列を**無限数列**という．

1.1.2　無限大

$n \to \infty$ とは，

<u>n を限りなく大きくするという操作</u>

を表す．[*1]

$n \to \infty$ のとき，無限数列 $\{a_n\}$ がどのようになるかを考える．

1.1.3　収束・発散

$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が有限確定値 α に限りなく近づくことを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す．α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**といい，このとき数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**という．

また，$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が限りなく大きくなることを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

さらに数列 $\{a_n\}$ が負の値をとり，かつその絶対値が限りなく大きくなることを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

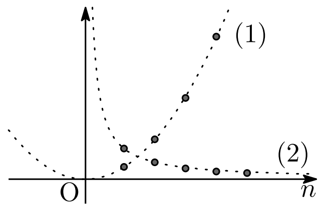
[*1] 大きい数を 1 つ想像してください．n を，その数より大きくすることができます（自然数にはいくらでも大きい数が存在します．そのように n をどんどん大きくするということを，$n \to \infty$ と表します．

と表す．数列が収束しないとき，**発散する**という．

例 1.2

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

これらの数列のグラフは次のようになる．



数列は自然数を定義域とする，関数の一種である．そのグラフは点々と並ぶ，不連続なグラフとなる．

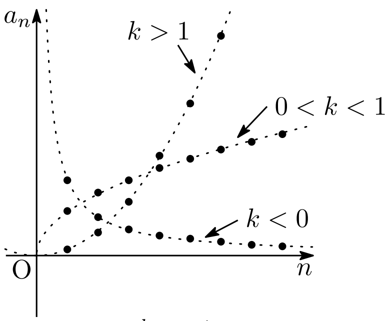
1.1.4 重要な数列の極限

公式

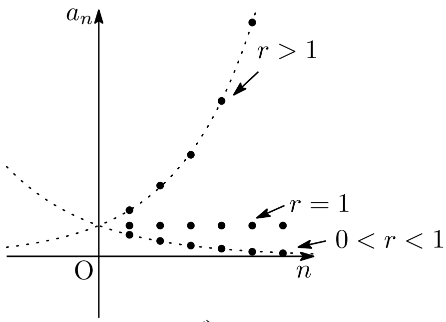
$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} \infty & (k>0 \text{ のとき}) \\ 1 & (k=0 \text{ のとき}) \\ 0 & (k<0 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r=1 \text{ のとき}) \\ 0 & (-1<r<1 \text{ のとき}) \\ \text{発散（振動）} & (r \leqq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例 1.3

$a_n = n^k$，$a_n = r^n$ のグラフは下図のようになる．

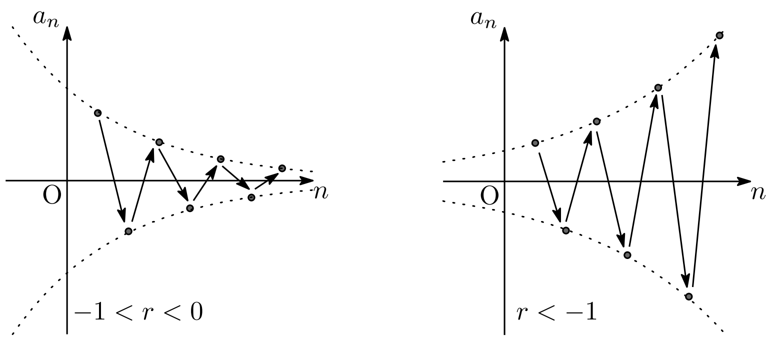


$a_n = n^k$ のグラフ



$a_n = r^n$ のグラフ

また，$r<0$ のときの $a_n = r^n$ のグラフは次のようになる．



左は 0 に収束，右は振動しながら絶対値が限りなく大きくなる．

例題 $1-1$

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}$.　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n$.　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^n$.

解答・解説

それぞれの数列のグラフを考えて，次の結果を納得せよ．

(1) $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty. \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=n^{-\frac{1}{3}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0. \qquad \textbf{(答)}$$

(3) $2>1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty. \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $\pi<\sqrt{10}=3.16\cdots$ より $0<\dfrac{\pi}{\sqrt{10}}<1$．よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^n=0. \qquad \textbf{(答)}$$

数列の極限に関する性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が**収束し**，それぞれの極限値が α，β である，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

のとき，次が成り立つ (k, l は実数の定数).

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$，　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$，　③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$. $(\beta \neq 0)$

逆は成り立たない．たとえば，$\{a_n - b_n\}$ が収束しても，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束するとは限らない．

注意 1.4

たとえば，

$$a_n = n, \quad b_n = n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という 2 つの数列を考える．

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

であるが，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに $+\infty$ に発散する．

2 つの数列が**有限確定値に収束する場合に限り**，数列の四則演算および定数倍は，極限の四則演算および定数倍であるとしてよい．

例題 $1-2$

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して，

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という関係が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の収束・発散について，理由とともに述べよ．

(2)　$\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき，$\{b_n\}$ の収束・発散について理由とともに述べよ．

解答・解説

(1)　たとえば，数列 $\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき，$b_n = a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ で，

$\{a_n\}$，$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ はともに有限確定値に収束するから，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\} = \lim_{n\to\infty}\left\{a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \alpha - 0 = \alpha$$

となり，$\{b_n\}$ も $\{a_n\}$ と同じ有限確定値 α に収束する．

ところが，たとえば

$$a_n = n, \quad b_n = n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

などという場合は，$\{a_n - b_n\}$ は 0 に収束するが，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに発散する．

以上より，この 2 つの数列の収束・発散については，なにも分からない． (**答**)

(2) (1) の議論から，$\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき $\{b_n\}$ も有限確定値 α に収束する．

(**答**)

例題 1 − 3

次の数列の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-10}{6n+5}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-1}{n^2+5n+1}$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+2}}{3^n-2^n}$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{2^{2n+3}}$.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)$.

解答・解説

与えられた n に関する分数式が，$n \to \infty$ のとき，分母も分子も限りなく大きくなることがある．このとき極限値がどうなるかは，与えられた式によって変わる．このような形式を，「$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形」[*2] という．このタイプの不定形を解消するには，分母の**主要項**（$n \to \infty$ で最も発散の速い項）で分母・分子を割るとよい．

また，$\{a_n - b_n\}$ の形の数列で，$n \to \infty$ のとき $\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ も限りなく大きくなるようなものがある．「$\infty - \infty$ の不定形」という．このようなタイプの不定形を解消するために，「分子を有理化」するという方法がある．

[*2] 1.1.5 で書いたように，∞ は数ではありませんので，このような書き方は本当は正しくありません．

(1) $n \to \infty$ における分母の主要項は n であるから，分母と分子を n で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n-10}{6n+5} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{10}{n}}{6+\frac{5}{n}} \\ &= \frac{3-0}{6+0} = \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) $n \to \infty$ における分母の主要項は n^2 であるから，分母と分子を n^2 で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-1}{n^2+5n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &= +\infty. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

注意 1.5

正の無限大 ∞ を $+\infty$ と表すこともある．符号を強調するときなどに用いる．

(3) $n \to \infty$ における分母の主要項は 3^n であるから，分母と分子を 3^n で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+2}}{3^n-2^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3+2^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{3+0}{1-0} = 3. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(4) $n \to \infty$ における分母の主要項は $2^{2n} = 4^n$ であるから，分母と分子を 4^n で割って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{2^{2n+3}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2^3} \\ &= \frac{1+0}{2^3} = \frac{1}{8}. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(5) まず，与式の分母と分子に $\sqrt{n^2-2n}+n$ をかけると

$$\sqrt{n^2-2n}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2-2n}+n} = \frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$$

このとき $n \to \infty$ における分母の主要項は n であるから，分母・分子を n で割って，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{1-0}+1} = -1. \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

1.1.5 無限大は「数」ではない

∞ を「数」のように扱ってはならない．たとえば次のような書き方はしない．

間違った例 1.6

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = 2^\infty = \infty.$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

正しくは，

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

となる．繰り返し書くが，∞ とは，「n を限りなく大きくする」という操作のことである．数学の答案の中で ∞ が現れるのは，lim の下と，極限として得られた結果の部分だけである．[*3]

1.2 はさみうちの原理

次が成り立つ．

極限と大小関係

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき，

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \leqq b_n \quad \text{ならば} \quad \alpha \leqq \beta$$

である．

注意 1.7

グラフを考えて納得せよ．

例題 1 − 4

α，β を有限確定値，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．

$$\text{つねに } a_n < b_n \quad \text{であり，かつ} \quad \alpha = \beta$$

ということがあるかどうか答えよ．ある場合には具体例を示し，ない場合は証明せよ．

[*3] $\displaystyle\lim_{\underset{\uparrow \text{ここと}}{n\to\infty}} a_n = \infty.$ (←ここ)

解答・解説

たとえば，

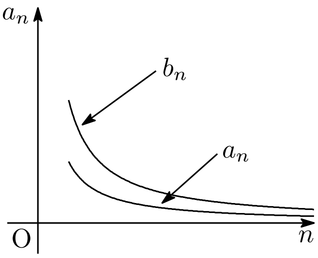
$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{2}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

のとき，すべての自然数 n に対して $a_n < b_n$ であるが，極限値はともに 0 である． (**答**)

注意 1.8

「極限値」とは，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が**近づいていく値**のことなので，つねに $a_n < b_n$ だったとしても，極限値（ゴール地点）が同じということはあり得る．

右のグラフは横軸のスケールが大きいため，点々がつながって見えている．



また，次が成り立つ．

はさみうちの原理 (数列)

α を有限確定値とする．

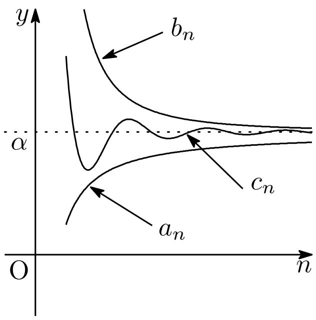
$$\text{すべての } n \text{ に対して } a_n \leqq c_n \leqq b_n, \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

ならば，数列 $\{c_n\}$ も収束して，

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha.$$

注意 1.9

グラフを考えて納得せよ．



例題 $1-5$

θ を定数とする．正整数 n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ を求めよ．

解答・解説

任意の n，θ に対して，つねに

$$-1 \leqq \sin n\theta \leqq 1$$

であるから，各辺を $n\ (>0)$ で割ると

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin n\theta}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

となる．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=0.$ (**答**)

さらに，次が成り立つ．

追い出しの原理 (数列)

すべての n に対して $a_n \leqq b_n$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$$

グラフを考えて納得せよ．

演習問題 $1-1$

一般項が次の式で与えられる数列の収束・発散を調べ，収束するものはその極限値を求めよ．

(1) $\dfrac{4n+3}{2n^2+1}$

(2) $\dfrac{(n+1)(n+3)}{(2n-3)(n-1)}$

(3) $\dfrac{n^2+n+1}{-3n+2}$

(4) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}$

(5) $n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$

(6) $3n\left(\sqrt[3]{n^3-n+1}-\sqrt[3]{n^3+8}\right)$

(7) $\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2^{2n+1}}$

(8) $\dfrac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(9) $2\log_2 n-\log_2 n(2n+1)$

(10) $\log_a\dfrac{a^{n+1}}{a^n+1}$ $(a>1)$

(11) $\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

(12) $\dfrac{[10^n\pi]}{10^n}$

($[x]$ は x を超えない最大の整数)

演習問題 $1-2$

I. 次の数列の極限を求めよ．

(1) $\left\{\log_{10}\dfrac{3n+4}{(n+1)(n+2)}\right\}$

(2) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}\right\}$

(3) $\left\{\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\quad(a,\ b\text{ は正の整数})\right\}$

II. 次の無限級数の収束・発散を調べ，収束すればその和を求めよ．

(1) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+\cdots\cdots$

(2) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}+\cdots\cdots$

演習問題 1 − 3

a を正の定数とする．$f(x) = x^2 - a$ として，グラフ $y = f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_{n+1} とする．このようにして，x_1 から順に x_2，x_3，x_4，$\cdots\cdots$ を作る．$x_1 > \sqrt{a}$ とするとき，

(1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ．
(2) $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$ であることを示せ．
(3) $|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \dfrac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}|$ であることを示せ．
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

演習問題 1 − 4

自然数 n に対して，3^n の桁数を a_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ を求めよ．

演習問題 1 − 5

$a,\, b$ は正の実数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

演習問題 1 − 6

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = \frac{\sin^{2n+1} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

で定められたものとする．この数列の極限値を $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ とおく．関数 $y = f(x)$ のグラフを xy 平面上に図示せよ．

体験授業をご受講いただく皆さんへ

体験授業をお申し込みいただきありがとうございます。
Ｚ会の教室の授業は、学力を効果的に上げていくためのカリキュラム・内容となっております。
次回以降もぜひ継続して受講することをおすすめします。

《体験授業後の流れ》

お申し込み方法

引き続き継続して受講される場合は、各教室窓口・お電話でお申し込みが可能です。
※体験授業終了直後に窓口で申し込んでお帰りになることもできます。
※認定が必要な講座をご希望の方はテストを受験していただく場合があります。
※予習が必要な講座は次回までの予習がありますので、余裕を持ってお申し込みください。
※本科授業は、**「クラス授業」「映像授業」「個別指導」**が選べます。「時間の都合がつかない」「授業内でわからない部分だけを学習したい」という方には**「映像授業」**を、「映像授業で学習した内容で難しかった部分をしっかりと理解したい」という方は、映像授業を受講した後で個別を指導を受けられる**「個別指導」**を、それぞれおすすめします。
※映像授業の体験も承ります。一部の講座では映像授業のご用意がありません。予めご了承ください。

通話料無料 **0120-2828-76** 月曜日～土曜日 12:00～20:00（休室日を除く）

各教室電話番号
月曜日～土曜日
14:00～21:00
（休室日を除く）

御茶ノ水教室	03-5296-2828	池袋教室	03-5985-2828
渋谷教室	03-5774-2828	横浜教室	045-313-2828
新宿教室	03-5304-2828	葛西教室	03-5878-0844

お申し込み後の流れ

お申し込みから１週間以内に手続書類（入会書類、お支払いについて、会員証など）をお送りします。
※受講料のお支払い期日が次回授業よりも後の場合でも、次回授業へのご参加は可能です。
※体験授業後にご受講いただく場合、「Ｚ会の教室」では「月度」単位で受講料を請求させていただいているため、体験授業分も受講料をご請求する場合があります。くわしくは教室スタッフまでお問い合わせください。

→ お申し込み後、テキストを各教室窓口にてお受け取りください。

※葛西教室にて高1・高2講座・受験講座、
Ｚ会進学教室大学受験部立川教室にて高1・高2・受験生講座を開講しております。

講座選択に迷ったら…

学習相談は随時承っています。お電話でのご相談も可能です。
受講に際して不明点、不安な点がある方は、各教室の窓口、または上記番号までお気軽にお問い合わせください。

Ｚ会の教室の受講サポート　―万全のシステムで効果的な学習をサポートします―

1. 講師への質問

授業前後の時間や休み時間を利用して、担当講師に直接質問をすることができます。
疑問点をそのままにすることなく、その場で解消することができます。

2. 振替受講

本科のクラス授業で欠席する回の授業を、同一週・同一講座の他のクラスで振替受講することができます。他教室への振替、映像授業（教室・自宅での受講）への振替も可能です。前日までに各教室窓口、お電話にてお申し出下さい。
※振替手続は一週前の月曜から可能です。

3. 進路・学習・入試相談

各教室の学習アドバイザーが皆さんのご相談を随時承っています。

4. 自習室

本科生の方は休室日を除いて、全教室の自習室をいつでもご利用いただけます。