【体験授業用教材】

M2JD

本科１期４月度 １回目

Z会東大進学教室／Z 会京大進学教室【体験授業用教材（抜粋版）】

高2東大理系数学Ⅲ

M2JD Term 1 Contents

Lecture 1　数列の極限 (1)　収束・発散 1
1.1 数列の極限 1
1.1.1 数列 1
1.1.2 無限大 1
1.1.3 収束・発散 1
1.1.4 重要な数列の極限 2
1.1.5 無限大は「数」ではない 6
1.2 はさみうちの原理 7
1.3 演習問題 12
1.4 添削課題 17

Lecture 2　数列の極限 (2)　無限級数 19
2.1 無限級数 19
2.1.1 基本的な用語 19
2.1.2 収束，発散 19
2.1.3 無限級数が収束するとき 20
2.1.4 無限等比級数 22
2.1.5 無限等比級数の収束，発散 22
2.2 演習問題 24
2.3 添削課題 29

Lecture 3　微分法 (1)　分数関数と無理関数 31
3.1 写像 31
3.1.1 基本的な用語 31
3.1.2 逆写像 32
3.1.3 合成写像 33
3.2 関数 33
3.2.1 定義 33
3.2.2 逆関数 33

3.2.3 合成関数 34
3.3 分数関数と無理関数 34
3.3.1 分数関数 34
3.3.2 無理関数 36
3.4 演習問題 38
3.5 添削課題 44

Lecture 4 微分法 (2) 関数の極限 45
4.1 関数の極限 45
4.1.1 定義 45
4.1.2 発散 46
4.1.3 片側極限 47
4.1.4 ∞ における極限 48
4.1.5 はさみうちの原理 48
4.2 関数の連続性 49
4.3 微分係数と導関数，微分可能 50
4.3.1 平均変化率 50
4.3.2 微分係数 50
4.3.3 微分可能性と連続性 52
4.4 演習問題 54
4.5 添削課題 59

Lecture 5 微分法 (3) 指数・対数・3 角関数の極限 61
5.1 自然対数の底 61
5.2 指数・対数関数に関する極限 61
5.3 3 角関数の極限 64
5.4 演習問題 68
5.5 添削課題 72

Lecture 6 微分法 (4) 導関数の基本 73
6.1 微分係数と導関数 73
6.1.1 平均変化率 73
6.1.2 微分係数 73
6.2 導関数 75
6.2.1 定義 75
6.2.2 線型性，積，商の微分法 75
6.2.3 合成関数の微分法 77

6.2.4 逆関数の微分法 78
6.2.5 陰関数の微分法 79
6.2.6 $y = x^\alpha$ の導関数 80
6.3 演習問題 83
6.4 添削課題 88

Lecture 7 微分法 (5) 指数・対数関数の導関数 89
7.1 指数関数，対数関数の導関数 89
7.1.1 指数関数の導関数 89
7.1.2 対数関数の導関数 90
7.2 対数微分法 91
7.2.1 基本 91
7.2.2 $y = x^\alpha$ の導関数の導出 91
7.3 演習問題 93
7.4 添削課題 97

Lecture 8 微分法 (6) 3 角関数の導関数 99
8.1 3 角関数の導関数 99
8.2 高階導関数 100
8.3 演習問題 102
8.4 添削課題 107

Lecture 9 微分法 (7) 接線，曲線の凹凸とグラフ 109
9.1 接線，法線 109
9.1.1 接線 109
9.1.2 法線 111
9.2 平均値の定理 112
9.2.1 補題 112
9.2.2 Rolle の定理 113
9.2.3 平均値の定理 114
9.3 増減，極値 116
9.3.1 増加・減少の定義 116
9.3.2 微分と増減 116
9.3.3 極値 117
9.4 曲線の凹凸 119
9.4.1 凹凸の定義 119
9.4.2 2 階導関数と凹凸 120

9.4.3 変曲点 122
9.5 漸近線 123
9.5.1 y 軸に平行な漸近線 124
9.5.2 y 軸に平行でない漸近線 124
9.6 演習問題 128
9.7 添削課題 134

Lecture 10 微分法 (8) 方程式・不等式への応用 135
10.1 中間値の定理 135
10.2 不等式への応用 137
10.3 演習問題 141
10.4 添削課題 147

Lecture 11 微分法 (9) 速度と加速度 149
11.1 座標を定める変数 149
11.1.1 定義 149
11.1.2 自分自身と交わる曲線 149
11.2 パラメータ（媒介変数）表示された関数の微分法 150
11.3 速度と加速度 151
11.3.1 直線上の点の運動 151
11.3.2 平面上の点の運動 152
11.4 演習問題 154
11.5 添削課題 160

Lecture 12 微分法 (10) 曲線のパラメータ表示 161
12.1 曲線の概形 161
12.1.1 パラメータ消去 161
12.1.2 パラメータ表示された関数の微分 162
12.2 演習問題 164
12.3 添削課題 168

Lecture 13 総合演習 169

Appendix A 補足的事項 177
A.1 転換法 177
A.2 拡大実数系 178
A.3 数列の極限について 178
A.3.1 $\varepsilon - N$ 論法 178

A.3.2 正整数が上に有界でないこと 179
A.3.3 数列の収束の図形的イメージ 180
A.3.4 いくつかの証明 180
A.3.5 はさみうちの原理の証明 182
A.4 数列の収束について 183
A.4.1 上界，下界，上限，下限 183
A.4.2 有界で単調な数列が収束すること 184
A.5 合成関数の微分法の証明 185
A.6 ベクトルの微分とパラメータ表示された関数の微分法 187
A.7 Taylor の定理 188
A.8 Cauchy の平均値の定理，l'Hôpital の定理 192
A.9 凹凸について 194
A.9.1 定義 194
A.9.2 凹凸と導関数の増減 194
A.9.3 2 階導関数と極値 196

Introduction

本講座では，数学 III の極限，微分法，積分法を基礎から学びます．（2 次曲線は本科 2 期，複素数平面は冬期講習で扱います．）基本的な[*1]内容，用語の理解，微分，積分の計算力をつけることを目標としています．

予習

- 本講座は，原則として予習は不要です．復習をしっかり行いましょう．
- やむを得ず欠席した場合は，要点などを自分で読み，担当の先生に相談すること．
- 演習問題は授業で扱います．特に指示がなければ予習はしないこと．

授業

- 演習用と，板書用の 2 種類のノートを用意するとよいと思います（強制はしません）．
- 数学 III は，他の単元と比べて前後の相関が強いです．1 回分の内容を理解していないと，次の内容に進めません．原則として，遅刻，欠席はしないようにしましょう．

復習

- 授業で学んだことを確認し，定着させましょう．
- 授業で学んだことの復習は，その週のうちに終わらせましょう．
- 毎週の添削課題を必ず提出してください．[*2]
- 授業に出席すれば数学が身につくわけではありません．自分の手で証明をし，自分の手で計算をすること．[*3]

[*1] 「簡単」という意味ではありません．基本とは，応用のための基礎，土台です．

[*2] 学習のペースメーカーとして，また次回の授業までに身につけなければならないことの復習として実施するものです．提出の遅れは原則として認めません．

[*3] 理系は，「極限，微積分の計算が淀みなくできること」が必要条件です（十分性はない）．復習するときは，当面の目標として重要な計算例全てをスムーズに計算しきること，を目指すとよいでしょう．

表記法について

- 実数の区間.
  - † 開区間 $a < x < b$ を $(a,\ b)$ と表す.
  - † 閉区間 $a \leqq x \leqq b$ を $[a,\ b]$ と表す.
  - † 半開区間 $a \leqq x < b$，$a < c \leqq b$ をそれぞれ $[a,\ b)$，$(a,\ b]$ と表す.

- 集合の記号.
  - † 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す.
  - † 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と表す.
  - † 正整数全体の集合を $\mathbb{N}$，または $\mathbb{Z}^+$ と表す.

- このテキストでの約束.

例　ごく基本的な計算例です．講義を欠席するなどして自習する際には，読み飛ばさず，しっかりと手で書きながら確認しましょう.

例題　その講の内容を理解するための，具体的な問題．多少難しいものも含まれますが，内容理解のため必要な問題です.

演習問題　その講で絶対に身につけなければいけない，基本的な問題例です.

添削課題　その講の内容を定着させるための課題です．次週までに所定の用紙に解答を作成，提出しましょう.

Lecture 1　数列の極限 (1)　収束・発散

1.1　数列の極限

1.1.1　数列

正の（または非負の）整数を定義域とする関数を**数列**という．n と a_n には対応関係がある．

通常，数列を表すときは

$$\{a_n\} \ : \ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように，カンマで区切って表すことが多い．

例 **1.1**

n と a_n の対応を表にまとめることもできる．たとえば，正整数 n に対して $a_n = 2n - 1$ と表される数列の対応は，次の表のようになる．

n	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
a_n	1	3	5	$\cdots$	$2n-1$	$\cdots$

項の数が有限個である数列を**有限数列**，どこまでも続く数列を**無限数列**という．

1.1.2　無限大

$n \to \infty$ とは，

<u>n を限りなく大きくするという操作</u>

を表す．[*1]

$n \to \infty$ のとき，無限数列 $\{a_n\}$ がどのようになるかを考える．

1.1.3　収束・発散

$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が有限確定値 α に限りなく近づくことを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す．α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**といい，このとき数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**という．

また，$n \to \infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ が限りなく大きくなることを，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

[*1] 大きい数を 1 つ想像してください．n を，その数より大きくすることができます（自然数にはいくらでも大きい数が存在します．そのように n をどんどん大きくするということを，$n \to \infty$ と表します．

さらに数列 $\{a_n\}$ が負の値をとり，かつその絶対値が限りなく大きくなることを，

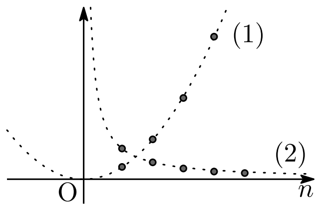
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と表す．数列が収束しないとき，**発散する**という．

例 1.2

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$　　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

これらの数列のグラフは次のようになる．



数列は自然数を定義域とする，関数の一種である．そのグラフは点々と並ぶ，不連続なグラフとなる．

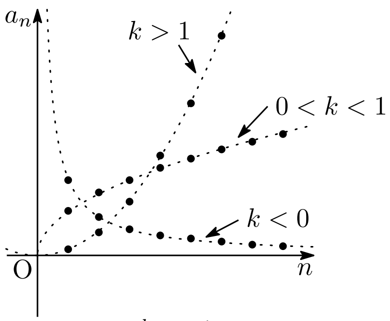
1.1.4　重要な数列の極限

公式

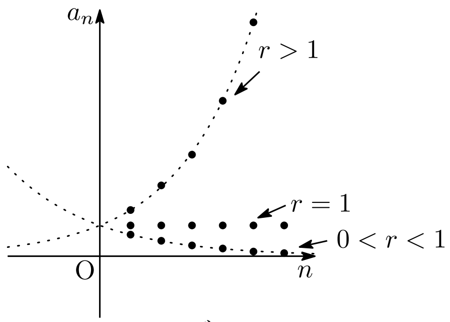
$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} \infty & (k > 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (k = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (k < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r > 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (-1 < r < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散（振動）} & (r \leqq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例 1.3

$a_n = n^k$，$a_n = r^n$ のグラフは下図のようになる．

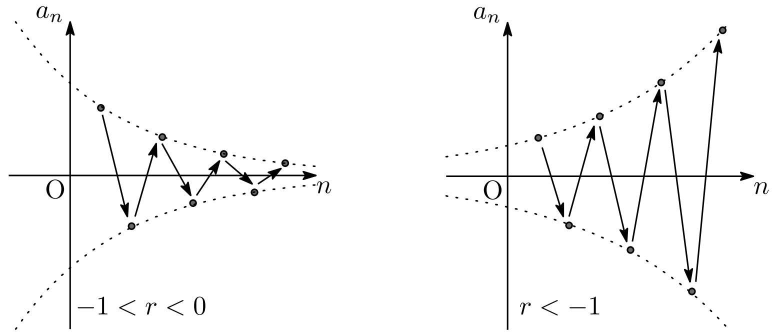


$a_n = n^k$ のグラフ



$a_n = r^n$ のグラフ

また，$r<0$ のときの $a_n=r^n$ のグラフは次のようになる．



左は 0 に収束，右は振動しながら絶対値が限りなく大きくなる．

例題 1 − 1

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}$.　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n$.　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^n$.

解答・解説

それぞれの数列のグラフを考えて，次の結果を納得せよ．

(1) $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty. \qquad \text{(答)}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=n^{-\frac{1}{3}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0. \qquad \text{(答)}$$

(3) $2>1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty. \qquad \text{(答)}$$

(4) $\pi<\sqrt{10}=3.16\cdots$ より $0<\dfrac{\pi}{\sqrt{10}}<1$．よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^n=0. \qquad \text{(答)}$$

数列の極限に関する性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束し，それぞれの極限値が α，β である，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

のとき，次が成り立つ (k, l は実数の定数).

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$,　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$,　③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$. $(\beta \neq 0)$

逆は成り立たない．たとえば，$\{a_n - b_n\}$ が収束しても，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束するとは限らない．

注意 1.4

たとえば，

$$a_n = n, \quad b_n = n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という 2 つの数列を考える．

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

であるが，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに $+\infty$ に発散する．

2 つの数列が**有限確定値に収束する場合に限り**，数列の四則演算および定数倍は，極限の四則演算および定数倍であるとしてよい．

例題 1 − 2

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して，

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という関係が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の収束・発散について，理由とともに述べよ．

(2) $\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき，$\{b_n\}$ の収束・発散について理由とともに述べよ．

解答・解説

(1) たとえば，数列 $\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき，$b_n = a_n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ で，$\{a_n\}$，$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ はともに有限確定値に収束するから，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\} = \lim_{n\to\infty}\left\{a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \alpha - 0 = \alpha$$

となり，$\{b_n\}$ も $\{a_n\}$ と同じ有限確定値 α に収束する．

ところが，たとえば

$$a_n = n, \quad b_n = n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

などという場合は，$\{a_n - b_n\}$ は 0 に収束するが，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに発散する．

以上より，この 2 つの数列の収束・発散については，なにも分からない．　(答)

(2)　(1) の議論から，$\{a_n\}$ が有限確定値 α に収束するとき $\{b_n\}$ も有限確定値 α に収束する．

(答)

例題 1 − 3

次の数列の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n-10}{6n+5}$.　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n^2+5n+1}$.　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^{n+2}}{3^n-2^n}$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{2^{2n+3}}$.　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)$.

解答・解説

与えられた n に関する分数式が，$n\to\infty$ のとき，分母も分子も限りなく大きくなることがある．このとき極限値がどうなるかは，与えられた式によって変わる．このような形式を，「$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形」[*2] という．このタイプの不定形を解消するため，分母の**主要項**（$n\to\infty$ で最も発散の速い項）で分母・分子を割ることで 0 に向かう項を作り説明する．

また，$\{a_n - b_n\}$ の形の数列で，$n\to\infty$ のとき $\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ も限りなく大きくなるようなものがある．「$\infty-\infty$ の不定形」という．このようなタイプの不定形を解消するとき，「分子を有理化」することがある．

(1)　$n\to\infty$ における分母の主要項は n であるから，分母と分子を n で割って，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-10}{6n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\dfrac{10}{n}}{6+\dfrac{5}{n}} = \frac{3-0}{6+0} = \frac{1}{2}. \qquad \text{(答)}$$

---

*2　1.1.5 に書かれているように，∞ は数ではありません．従って，このような書き方は本当は正しくありません．

(2) $n \to \infty$ における分母の主要項は n^2 であるから，分母と分子を n^2 で割って，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n^2+5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - \dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = +\infty. \qquad \text{(答)}$$

> **注意 1.5**
> 正の無限大 ∞ を $+\infty$ と表しても同じ．符号を強調するときなどに用いる．

(3) $n \to \infty$ における分母の主要項は 3^n であるから，分母と分子を 3^n で割って，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^{n+2}}{3^n-2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} = \frac{3+0}{1-0} = 3. \qquad \text{(答)}$$

(4) $n \to \infty$ における分母の主要項は $2^{2n} = 4^n$ であるから，分母と分子を 4^n で割って，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^n}{2^{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{2^3} = \frac{1+0}{2^3} = \frac{1}{8}. \qquad \text{(答)}$$

(5) まず，与式の分母と分子に $\sqrt{n^2-2n}+n$ をかけると

$$\sqrt{n^2-2n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2-2n}+n} = \frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$$

このとき $n \to \infty$ における分母の主要項は n であるから，分母・分子を n で割って，

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}+1} = \frac{-2}{\sqrt{1-0}+1} = -1. \qquad \text{(答)}$$

1.1.5 無限大は「数」ではない

∞ を「数」のように扱ってはならない．たとえば次のような書き方はしない．

> **間違った例 1.6**
> (1) $\lim_{n\to\infty} 2^n = 2^\infty = \infty.$ (2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

正しくは，

(1) $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$ (2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

となる．繰り返し書くが，∞ とは，「n を限りなく大きくする」という操作のことである．数学の答案の中で ∞ が現れるのは，lim の下と，極限として得られた結果の部分だけである．[*3]

1.2 はさみうちの原理

次が成り立つ．

極限と大小関係

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき，

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \leqq b_n \quad \text{ならば} \quad \alpha \leqq \beta$$

である．

注意 1.7

グラフを考えて納得せよ．

例題 1 − 4

α，β を有限確定値，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．

$$\text{つねに } a_n < b_n \quad \text{であり，かつ} \quad \alpha = \beta$$

ということがあるかどうか答えよ．ある場合には具体例を示し，ない場合は証明せよ．

解答・解説

たとえば，

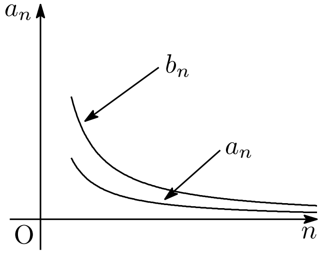
$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{2}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

のとき，すべての自然数 n に対して $a_n < b_n$ であるが，極限値はともに 0 である．　(答)

注意 1.8

「極限値」とは，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が近づいていく値のことなので，つねに $a_n < b_n$ だったとしても，極限値（ゴール地点）が同じということはあり得る．

第 1 講と同様，右のグラフは横軸のスケールが大きいため，点々がつながって見えている．



[*3] $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \uparrow\text{ここと}}} a_n = \infty$.（←ここ）

また，次が成り立つ．

はさみうちの原理 (数列)

α を有限確定値とする．

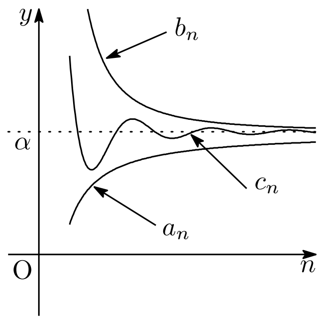
$$\text{すべての } n \text{ に対して } a_n \leqq c_n \leqq b_n\,, \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

ならば，数列 $\{c_n\}$ も収束して，

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha.$$

注意 1.9

グラフを考えて納得せよ．



例題 1 − 5

θ を定数とする．正整数 n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ を求めよ．

解答・解説

任意の n，θ に対して，つねに

$$-1 \leqq \sin n\theta \leqq 1$$

であるから，各辺を $n\ (>0)$ で割ると

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin n\theta}{n} \leqq \frac{1}{n}$$

となる．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = 0.$ (答)

さらに，次が成り立つ．

追い出しの原理 (数列)

すべての n に対して　$a_n \leqq b_n$　かつ　$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$　ならば，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

グラフを考えて納得せよ．

次の例題は，初めて学習する際には読み飛ばしても構わない．ある程度，微分法の学習が進んでから戻って検討するとよい学習になる．

例題 1 − 6

次の極限を求めよ．ただし $a > 1$ であるとする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

解答・解説

(1)　$a > 1$ であるから，ある $x > 0$ に対して $a = 1 + x$ とおくことができる．ここで，十分大きい n に対して $a^n = (1+x)^n$ を 2 項展開すると

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, 1^{n-k}\, x^k \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\, x + {}_n\mathrm{C}_2\, x^2 + \cdots \\ &> {}_n\mathrm{C}_2\, x^2. \quad \text{(すべての項は正であるから)}\end{aligned}$$

すなわち，[*4]

$$\begin{aligned}& a^n > \frac{n(n-1)}{2} x^2 \\ \iff\quad & 0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{x^2\,(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad (\because\ x \text{ は定数})\end{aligned}$$

はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0. \qquad \text{(答)}$$

[*4] これがどういう意図かというと，$\frac{n}{a^n}$ を，それより大きい方から $\frac{1}{n}$ で押さえたい，ということです．a^n が n^2 より大，と言えればよいということ．

(2)　1 より大きい任意の実数 a に対して，

$$N-1 \leqq a < N$$

が成り立つような，2 以上の自然数 N がただ 1 つ存在する．そのような N より大きい自然数 n に対して，

$$a < n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{n} < 1 \qquad (n = N+1,\ N+2,\ \cdots)$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{N} \times \frac{a}{N-1} \cdot \frac{a}{N-2} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{1} \\ &< \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{N} \times \frac{a}{N-1} \cdot \frac{a}{N-2} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{1} \\ &= \left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1} \times \frac{a^{N-1}}{(N-1)!} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$0 < \dfrac{a}{N} < 1$ であり，$\dfrac{a^{N-1}}{(N-1)!}$ は定数であるから，

$$\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1} \times \frac{a^{N-1}}{(N-1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \qquad (答)$$

(3)　$n \to \infty$ であるから，$n \geqq 2$ としてよい．

$$\begin{aligned} 0 < \frac{n!}{n^n} &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &< \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \qquad (答)$$

参考 1.10

$n \in \mathbb{N}$ の関数，すなわち数列 $f(n)$，$g(n)$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ となることを

$$f(n) \ll g(n)$$

と書くとすれば（$g(n)$ は $f(n)$ よりものすごく大きいということ），上の結果は

$$n \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

ということである．(ただし $a > 1$)

1.3 演習問題

演習問題 $1-1$

次の極限を求めよ．ただし n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{5n+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-1}{2n^2+n-4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+3}{3n^2+7n+1}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{(n+3)(7n+4)}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^2+n+3}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-n^3}{2+n^3}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{1^3+2^3+\cdots+n^3}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\cdots+n)^2}{n\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)}$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}-\frac{n^2}{4n+1}\right)$

演習問題 1 − 2

次の極限を求めよ．ただし n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2-\pi)^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-5^n}{3^n+5^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{2^n}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3\cdot5^n}{2\cdot5^n-2^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{2^n+3^{n+2}}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^n+2^{n+1}}$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot2^{3n+1}+3^n+5\cdot4^n}{2^n+4^n+8^{n+1}}$

演習問題 1 − 3

次の極限を求めよ．ただし n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-n\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}-n)}$

演習問題 1 − 4

次の式で定められる無限数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

(1) $a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 1$

(2) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n, \quad a_1 = 3$

(3) $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n(n+1)}, \quad a_1 = 1$

(4) $2a_{n+1} = a_n + 4, \quad a_1 = 3$

$\boxed{\text{演習問題 } 1-5}$

次の無限数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

(1) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{2n\pi}{5}$

1.4 添削課題

添削課題 1 − 1

次の極限を求めよ．ただし n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2+n-2}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+5}{5n^2+n-1}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(7n+3)}{(2n+1)(3n-1)}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{(n+1)(2n^2+n+3)}$

添削課題 1 − 2

次の極限を求めよ．ただし n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}-2)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\pi-1)^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n+5^{n+1}}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+3^{n+1}}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2^n+3}{4\cdot 3^n+5}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+3^n}{4^n+2^n}$

添削課題 1 − 3

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}$ が 0 に収束することを，はさみうちの原理により説明せよ．

体験授業をご受講いただく皆さんへ

体験授業をお申し込みいただきありがとうございます。

Ｚ会の教室の授業は、学力を効果的に上げていくためのカリキュラム・内容となっております。

次回以降もぜひ継続して受講することをおすすめします。

《体験授業後の流れ》

お申し込み方法

引き続き継続して受講される場合は、各教室窓口・お電話でお申し込みが可能です。
※体験授業終了直後に窓口で申し込んでお帰りになることもできます。
※認定が必要な講座をご希望の方はテストを受験していただく場合があります。
※予習が必要な講座は次回までの予習がありますので、余裕を持ってお申し込みください。
※本科授業は、「**クラス授業**」「**映像授業**」が選べます。
※映像授業の体験も承ります。一部の講座では映像授業のご用意がありません。予めご了承ください。

通話料無料 **0120-2828-76** 月曜日～土曜日 12:00～20:00（休室日を除く）

各教室電話番号
月曜日～土曜日
14:00～21:00
（休室日を除く）

御茶ノ水教室	03-5296-2828	池袋教室	03-5985-2828
渋谷教室	03-5774-2828	横浜教室	045-313-2828
新宿教室	03-5304-2828	葛西教室	03-5878-0844

お申し込み後の流れ

お申し込みから1週間以内に手続書類（入会書類、お支払いについて、会員証など）をお送りします。

※受講料のお支払い期日が次回授業よりも後の場合でも、次回授業へのご参加は可能です。
※体験授業後にご受講いただく場合、「Z会の教室」では「月度」単位で受講料を請求させていただいているため、体験授業分も受講料をご請求する場合があります。くわしくは教室スタッフまでお問い合わせください。

→ お申し込み後、テキストを各教室窓口にてお受け取りください。

※葛西教室にて高1・高2講座・受験講座、
Z会進学教室大学受験部立川教室にて高1・高2・受験生講座を開講しております。

講座選択に迷ったら…

学習相談は随時承っています。お電話でのご相談も可能です。
受講に際して不明点、不安な点がある方は、各教室の窓口、または上記番号までお気軽にお問い合わせください。

Ｚ会の教室の受講サポート　―万全のシステムで効果的な学習をサポートします―

1. 講師への質問

授業前後の時間や休み時間を利用して、担当講師に直接質問をすることができます。
疑問点をそのままにすることなく、その場で解消することができます。

2. 振替受講

本科のクラス授業で欠席する回の授業を、同一週・同一講座の他のクラスで振替受講することができます。
他教室への振替、映像授業（教室・自宅での受講）への振替も可能です。前日までに各教室窓口、お電話にてお申し出下さい。

※振替手続は一週前の月曜から可能です。

3. 進路・学習・入試相談

各教室の学習アドバイザーが皆さんのご相談を随時承っています。

4. 自習室

本科生の方は休室日を除いて、全教室の自習室をいつでもご利用いただけます。