【体験授業用教材】

M3JSA / M3JA1 / M3JA2 / M3JA / M3TA

本科２期９月度１回目

Ｚ会東大進学教室【体験授業用教材（抜粋版）】

選抜東大･医学部理系数学
東大理系数学ＩＡⅡＢ
東大理系数学Ⅲ
東大理系数学
難関大学理系数学T

目　次

はじめに …… 2
14章　数の理論（1）／複素数平面（1） …… 4
15章　数の理論（2）／複素数平面（2） …… 16
16章　方程式／極限 …… 22
17章　図形（1）／最大・最小，方程式 …… 28
18章　図形（2）／不等式 …… 34
19章　図形（3）／評価 …… 40
20章　数列／定積分（1） …… 46
21章　確率（1）／面積 …… 52
22章　確率（2）／体積（1） …… 58
23章　不等式／体積（2），関数方程式 …… 64
24章　入試問題研究（1）／定積分（2） …… 70
25章　入試問題研究（2）／定積分（3） …… 76
26章　入試問題研究（3）／2次曲線 …… 82

はじめに

1．　Z会の教室　数学の指導方針

数学で他の人より一歩先にいくには

はじめて見たタイプの問題に対応できる力

が必要不可欠です。しかし，この力は，一朝一夕で身につけることはできず，勉強の仕方を間違うと思うように力がつきません。

そこで，数学科では，この力を養成するために，授業において，問題を数多く解くことに重点をおかず，演習価値の高い良質な問題を一問一問丁寧に解説し，「なぜそうなるのか」がわかることに重点をおいた指導を行います。さらに，一つの問題を様々な角度から考えるので，考え方の視野が広がっていくのも特徴です。なお，公式・定理などの重要事項についても場面に応じてわかりやすく解説することで，知識面の対策も行っていきます。

また，添削課題を通して，繰り返し答案作りを行うことで，自分の考えたことを採点者に正確に伝える力，いわゆる「記述力」も身につけていきます。

2．　授業について

予習

授業は，時間が限られています。その時間を最大限有効に活かすよう準備をしておきましょう。事前に「問題」に取り組んで解答を作成して授業に臨んでください。

授業内

授業は答え合わせの場ではありません。自身の解答と先生が示す正解が違うとき，どうしてそうなったのかを考える姿勢をつねにもち，授業に臨んでください。また，講義を集中して聞くことはもちろんですが，きちんとノートも取りましょう。そのとき，ただ正解を書き写すだけでなく，後の復習に役立つように，先生が示したポイントなども書き込んでおきましょう。

復習

授業で学習したことをきちんと定着させるためにも復習は欠かせません。おすすめの復習は，授業で扱った問題を解き直してみることです。着眼のポイントや方針の立て方等思い出しながら，実際に手を動かしてみましょう。さらに，余力がある人は授業で扱わなかった問題も解いてみましょう。

添削課題

最低限身につけておきたいという問題で構成されていますので，復習が追いつかないというときでも，この添削課題には，かかさず取り組みましょう。添削が返却されたら，間違えた箇所はなぜこの解答に至るのかという過程と照らし合わせて見直し，同じタイプの問題が次回出

題された時に正解が導けるようにしておきましょう。

３．　テキストの構成

●問題

授業を行うときに中心に扱うコーナーです。次の２つのパートに分かれています。

演習：授業のほとんどは，このパートにある問題の演習と解説を行います。

自習：補充問題です。自宅で復習用として練習してください。

※　自習の問題は章ごとに必ずあるわけではありません。

●添削課題

添削課題の取り組み方については，スタッフ・講師からの指示もしくは受講マニュアルに従ってください。

●問題のレベルについて

Ｚ会の教室のテキストでは，問題のレベルを★の個数によって３段階で表します。

★：基礎　　★★：標準　　★★★：応用（発展）

なお，☆は選抜講座専用問題となっています。

※映像授業をご受講の皆様

・映像授業では予習不要です。映像で問題演習の指示が出たら，映像を停止して問題に取り組みましょう。

・授業をご受講いただく前に，各講座のオリエンテーション映像をご覧ください。

１４章－１　数の理論（１）

問題

■演習

★【1】$43x+782y=1$ と $2<|x+18y|<12$ をみたす整数 x, y を求めよ.

★【2】次の条件 (a), (b) をともにみたす直角三角形を考える．ただし，斜辺の長さを p, その他の 2 辺の長さを q, r とする.

(a) p, q, r は自然数で，そのうちの少なくとも 2 つは素数である.

(b) $p+q+r=132$

(1) q, r のどちらかは偶数であることを示せ.

(2) p, q, r の組をすべて求めよ.

★★【3】次の 2 つの条件 (A), (B) をみたす自然数 n について考える.

(A) n は素数ではない.

(B) l , m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m| \leqq 2$ である.

(1) n が偶数のとき，(A), (B) をみたす n をすべて求めよ.

(2) n が 7 の倍数のとき，(A), (B) をみたす n をすべて求めよ.

(3) $2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で，(A), (B) をみたす n をすべて求めよ.

☆【4】a と b は互いに素な正の整数とし，さらに a は奇数とする．正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a+b\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ をみたすように定めるとき，次を示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい.

(1) a_2 は奇数であり，a_2 と b_2 は互いに素である.

(2) すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である.

MEMO

要点

14.1　極形式

複素数 z の表す点を P とする．線分 OP の長さが r，半直線 OP と実軸の正の向きとのなす角が θ のとき

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

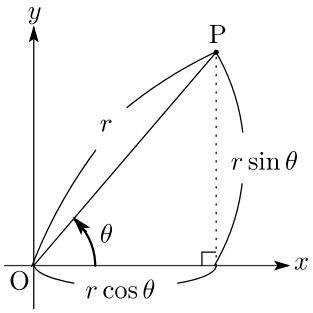
である．よって，このとき複素数 z は

$$r\cos\theta + i\cdot r\sin\theta$$

すなわち

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表せる．この表示法を，複素数 z の**極形式 (極表示)** という．r は z の絶対値である．角 θ を z の**偏角**といい，$\arg z$ で表す．ただし，$z = 0$ に対しては偏角は定義されない．



＜例＞

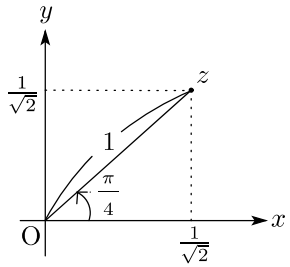
$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ のとき，極形式は

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

である．また

$$|z| = 1$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n : \text{整数})$$



≪注≫

$\arg z$ は，1 つの値に確定しない．上の例では

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

としてもよいし

$$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$$

としてもよい．

14.2　乗法・除法

極形式は，掛け算・割り算に適した表示法である．2 つの複素数 z_1 と z_2 が極形式

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

で表されるとき，その積と商は，加法定理を用いると，次のように整理される．

積：$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

商：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$= \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$

$= \dfrac{r_1}{r_2}\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$= \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

よって，絶対値と偏角について，次のことが成立する．

(i)	$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$
(ii)	$\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$　$(z_2 \neq 0)$
(iii)	$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
(iv)	$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

14.3　高次方程式

3 次以上の方程式は

(i) 1 つの解 α をみつけて

(ii)方程式を $(x-\alpha)\cdot Q(x) = 0$ の形に直す．

という手順をふむ．3 次・4 次方程式については解の公式が存在するが，複雑で実用的でない．

5 次以上では，解の公式は存在しないことが証明されている．

因数定理を言い換えると

$P(x)$ が整式のとき，$x = \alpha$ が方程式 $P(x) = 0$ の解である．

$\iff$　$P(\alpha) = 0$

$\iff$　方程式は $(x-\alpha)\cdot Q(x) = 0$ と変形できる．

一般に，実数係数の方程式が虚数解 α をもつとき，これと共役な複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解である．

また，k 重解を k 個として数えるとき，n 次方程式は，複素数の範囲でちょうど n 個の解をもつ．

14.4　ド・モアブルの定理

$|z| = 1$，$\arg z = \theta$ なる複素数 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ の n 乗を考える．積の性質より

$z^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

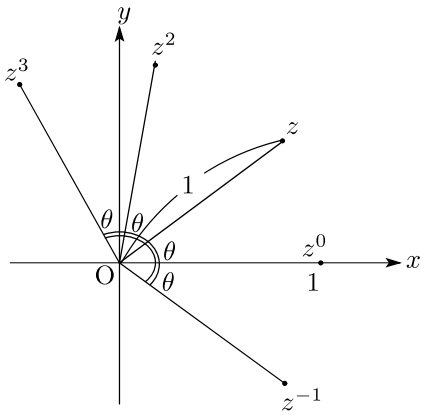
$z^3 = z^2 \cdot z = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

よって，一般に，任意の自然数 n に対して

$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

が成り立つ．

また，z^0 を 1，z^{-n} を $\dfrac{1}{z^n}$ と定めると，上の公式は n が 0 と負の整数のときにも成立する．これをド・モアブル **(de Moivre)** の定理という．



ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

14.5　複素数の n 乗根

$z^n = \alpha$ (α は与えられた複素数) という形の方程式を考えよう．例えば，$z^3 = 1$ を解いてみる．これは，因数分解を用いて解くことができるが，極形式を利用する解法が一般性をもつ．

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと，ド・モアブルの定理から

$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

また，1 の極形式は，$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ だから

$$z^3 = 1 \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$
$$\iff r^3 = 1, \quad 3\theta = 2\pi \times k \quad (k \text{ は整数})$$

r は実数であるから

$$r = 1, \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \times k$$

ゆえに，解は $z = \cos\dfrac{2\pi \times k}{3} + i\sin\dfrac{2\pi \times k}{3}$ である．

$$\begin{cases} k = 0 \text{ のとき}, & z = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ k = 1 \text{ のとき}, & z = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ k = 2 \text{ のとき}, & z = \cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$k = 3, 4, 5, \cdots$ としても，$k = -1, -2, -3, \cdots$ としても，これら 3 つの値以外は出てこない．よって，解は

$$1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

の 3 つである．この 3 解を図示すると，図 1 のようになる．結局，$z^3 = 1$ の解 (1 の 3 乗根) は，単位円上にバランスよく分布することがわかった．

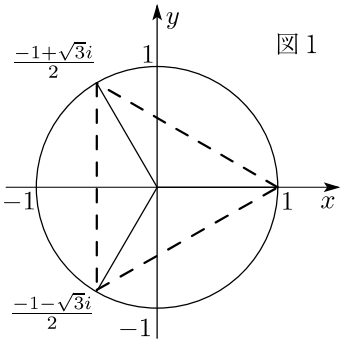


図 1

すなわち，点 1 を 1 つの頂点にもつ正三角形を形成するのである．このことは容易に一般化される．

1 の n 乗根

自然数 n に対して，$z^n = 1$ の解 (1 の n 乗根) は，次の n 個の複素数である．

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \times k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n} \times k\right)$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

また，これら n 個の数は，複素数平面上で

「点 1 を 1 つの頂点にもち，単位円に内接する正 n 角形の頂点」

である．

これと同様な方法で，$z^n = \alpha \quad (\text{ただし}, \alpha \neq 0)$ の解も求まり，次のようになる．

複素数の n 乗根

自然数 n に対して，$z^n = \alpha \quad (\text{ただし}, \alpha \neq 0)$ の解は，次の n 個の複素数である．

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \times k\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \times k\right)\right\}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

ただし，α は極形式 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表されるとする．

14.6　点と距離

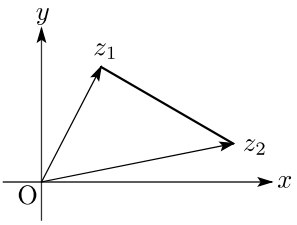
複素数 z をベクトルと考えることで, ベクトルに関するものと同様な公式が複素数平面上においても成立する.

(1) 内分点・外分点

複素数平面上の 2 点 z_1, z_2 を結ぶ線分を
(i)　$m:n$ に内分する点は, $\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}$
(ii)　$m:n$ に外分する点は, $\dfrac{-nz_1+mz_2}{m-n}$
特に中点は, $\dfrac{z_1+z_2}{2}$

(2) 2 点間の距離

2 点 z_1, z_2 の距離は, $|z_2-z_1|$



14.7　2 直線のなす角

3 点 $\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(z_2)$, $\mathrm{R}(z_3)$ に対して, 半直線 QP から QR へ測った角 $\angle\mathrm{PQR}$ について考える.

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=z_1-z_2$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}}=z_3-z_2$

であるから, z_1-z_2, z_3-z_2 の表す点をそれぞれ P', R' とすると, $\angle\mathrm{P'OR'}$ と $\angle\mathrm{PQR}$ は一致する (図 1).

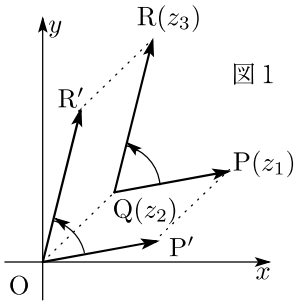


図 1

よって

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{PQR}&=\angle\mathrm{P'OR'}\\&=\arg(z_3-z_2)-\arg(z_1-z_2)\\&=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(z_2)$, $\mathrm{R}(z_3)$ とするとき, 半直線 QP から QR へ測った角 θ は

$$\theta=\arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$$

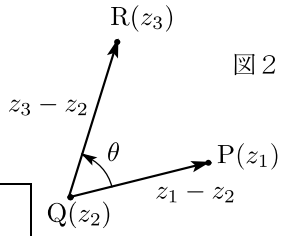


図 2

このことより, 次のことが成り立つ.

3 点 α, β, γ が一直線上にある.	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数
2 直線 $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ が垂直である.	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数
2 直線 $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ が垂直である.	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数

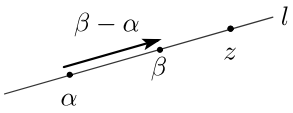
14.8　円と直線

(1) 直線

2 点 α，β を通る直線 l 上のすべての点は

$z = \alpha + t(\beta - \alpha)$　(t は実数)　$\cdots$①

と表せる．これが l のパラメータ表示である．l を z のみたす方程式として表してみよう．



「点 z は l 上にある」$\Longleftrightarrow$ ①をみたす実数 t がある．

$$\Longleftrightarrow \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = t \text{ をみたす実数 } t \text{ がある．}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ が実数である．}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$$

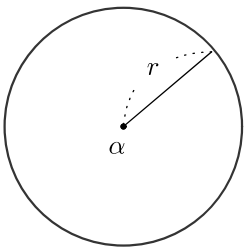
これを整理して

$(\overline{\beta} - \overline{\alpha})z - (\beta - \alpha)\overline{z} = \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$

(2) 円

中心 α，半径 r (>0) の円 C 上のすべての点 z がみたす条件は

$|z - \alpha| = r$



これは

$$|z-\alpha|^2 = r^2 \Longleftrightarrow (z-\alpha)\overline{(z-\alpha)} = r^2$$

$$\Longleftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = r^2$$

とできる．これを整理すると

$z\overline{z} - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} = r^2 - \alpha\overline{\alpha}$

問題

■演習

★【1】複素数平面上で複素数

$$z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ z_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i),\ z_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

によって表される点を，それぞれ P_1，P_2，P_3 とする．

また，$\alpha=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{3}$ として，複素数 αz_1，αz_2，αz_3 によって表される点をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3 とする．このとき，次の値を求めよ．ただし，O は原点である．

(1) $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$

(2) $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積

(3) $\triangle \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$ の面積

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2}$ と実軸の正方向とのなす角

★★【2】$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 z $(z\neq 0)$ を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ．

★★【3】複素数平面上において，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ $(|\alpha|>1)$ から，原点 O を中心とする半径 1 の円に接線を 2 本引く．これら 2 接線と円との 2 つの接点のうち，一方の接点を B，他方を C とし，直線 BC 上に点 $\mathrm{P}(z)$ があるとする．点 B を表す複素数を β とする．

(1) β は適当な実数 s によって，$\beta=\dfrac{\alpha}{1-si}$ と表されることを示せ．

(2) $\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}$ は点 A，P のとり方に関係なく一定であることを示し，その値を求めよ．

★【4】複素数 $\cos(120^\circ)+i\sin(120^\circ)$ を ω で表すとき，以下の問いに答えよ．

(1) 実数 p，q について，$\omega^2+p\omega+q=0$ とするためには $p=q=1$ が必要かつ十分であることを示せ．

(2) 複素数平面上で -2 を重心とする正三角形のひとつの頂点を複素数 t を用いて $-2+t$ と表すとき，他のふたつの頂点を t と ω を用いて表せ．

(3) (2) の正三角形の 3 頂点を表す複素数 z_1，z_2，z_3 が

$$z_1z_2z_3=-16,\ \arg(z_1)\leqq\arg(z_2)\leqq\arg(z_3)$$

を満たしているとき，z_1，z_2，z_3 を求めよ．ただし，偏角は 0° 以上 360° 未満の範囲で考えるものとする．

MEMO

添削課題

☆【1】3 以上 9999 以下の奇数 a で，$a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ．

体験授業をご受講いただく皆さんへ

体験授業をお申し込みいただきありがとうございます。
Z会の教室の授業は、学力を効果的に上げていくためのカリキュラム・内容となっております。
次回以降もぜひ継続して受講することをおすすめします。

《体験授業後の流れ》

お申し込み方法

引き続き継続して受講される場合は、各教室窓口・お電話でお申し込みが可能です。
※体験授業終了直後に窓口で申し込んでお帰りになることもできます。
※認定が必要な講座をご希望の方はテストを受験していただく場合があります。
※予習が必要な講座は次回までの予習がありますので、余裕を持ってお申し込みください。
※本科授業は、「**クラス授業**」「**映像授業**」が選べます。
※映像授業の体験も承ります。一部の講座では映像授業のご用意がありません。予めご了承ください。

通話料無料 **0120-2828-76** 月曜日～土曜日 12:00～20:00（休室日を除く）

各教室電話番号（月曜日～土曜日 14:00～21:00（休室日を除く））

御茶ノ水教室	03-5296-2828	池袋教室	03-5985-2828
渋谷教室	03-5774-2828	横浜教室	045-313-2828
新宿教室	03-5304-2828	葛西教室	03-5878-0844

お申し込み後の流れ

お申し込みから1週間以内に手続書類（入会書類、お支払いについて、会員証など）をお送りします。
※受講料のお支払い期日が次回授業よりも後の場合でも、次回授業へのご参加は可能です。
※体験授業後にご受講いただく場合、「Z会の教室」では「月度」単位で受講料を請求させていただいているため、体験授業分も受講料をご請求する場合があります。くわしくは教室スタッフまでお問い合わせください。

→ お申し込み後、テキストを各教室窓口にてお受け取りください。

※葛西教室にて高1・高2講座・受験講座、
Z会進学教室大学受験部立川教室にて高1・高2・受験生講座を開講しております。

講座選択に迷ったら…

学習相談は随時承っています。お電話でのご相談も可能です。
受講に際して不明点、不安な点がある方は、各教室の窓口、または上記番号までお気軽にお問い合わせください。

Z会の教室の受講サポート　―万全のシステムで効果的な学習をサポートします―

1. 講師への質問

授業前後の時間や休み時間を利用して、担当講師に直接質問をすることができます。
疑問点をそのままにすることなく、その場で解消することができます。

2. 振替受講

本科のクラス授業で欠席する回の授業を、同一週・同一講座の他のクラスで振替受講することができます。
他教室への振替、映像授業（教室・自宅での受講）への振替も可能です。前日までに各教室窓口、お電話にてお申し出下さい。
※振替手続は一週前の月曜から可能です。

3. 進路・学習・入試相談

各教室の学習アドバイザーが皆さんのご相談を随時承っています。

4. 自習室

本科生の方は休室日を除いて、全教室の自習室をいつでもご利用いただけます。