1MJSS/1MJS/1MJ

冬期講習

解答

Z会東大進学教室

中1選抜東大・医学部数学

中1数学

中1東大数学

1章　比例と反比例（1）

問題

【1】(1) ① $\boldsymbol{y = 150x}$

② $xy = 60 \times \dfrac{3}{2}$ より，

$$\boldsymbol{y = \frac{90}{x}}$$

③ $xy = 30 \times 6$ より，

$$\boldsymbol{y = \frac{180}{x}}$$

④ $y = \dfrac{1}{2} \times 6x$ より，

$$\boldsymbol{y = 3x}$$

(2) **①, ④**

比例定数は，① **150**　　④ **3**

(3) **②, ③**

比例定数は，② **90**　　③ **180**

【2】(1) A が矢印ウの向きに 1 回転すると，B は矢印エの向きに 2 回転する．

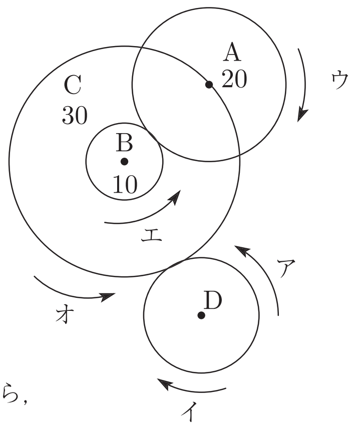
それにともなって，C も矢印オの向きに 2 回転するから，D は矢印イの向きに回転する．

D が y 回転するとして，

$$30 \times 2 = 12y$$

$$y = 5$$

よって，D は**イの向きに 5 回転**



(2) (1) より，A は 1 回転すると，C は 2 回転するから，

$$xy = 30 \times 2$$

$$\boldsymbol{y = \frac{60}{x}}$$

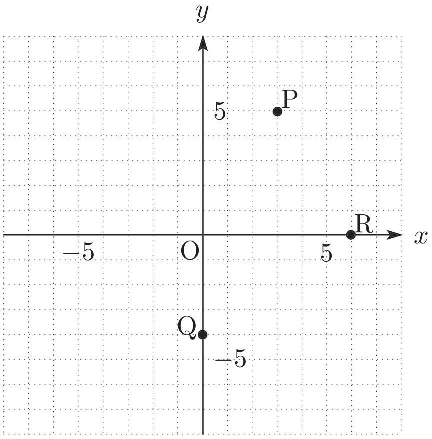
(3) (2) より，$y = \dfrac{60}{x}$ に $y = 4$ を代入して，

$$4 = \frac{60}{x}$$

$$x = \frac{60}{4} = 15$$　　歯数 **15**

【3】(1) A$(\mathbf{-5,\ 5})$, B$(\mathbf{-2,\ -6})$, C$(\mathbf{6,\ 3})$, D$(\mathbf{0,\ 4})$

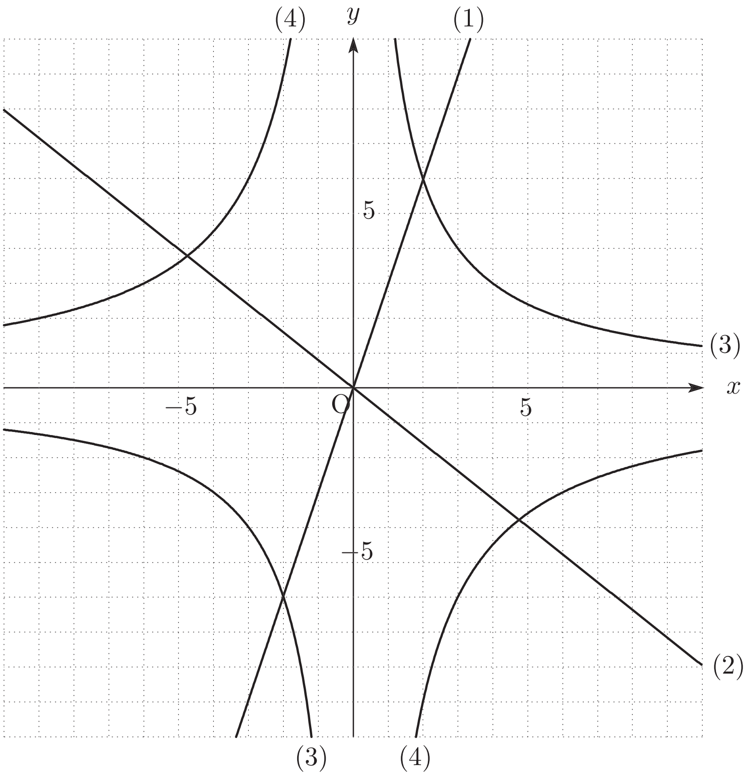
(2)



【4】(1) ① Q$(\mathbf{2,\ 3})$　② $(-2-5,\ 3+4)$ より R$(\mathbf{-7,\ 7})$　③ S$(\mathbf{-3,\ -2})$

(2) $\left(\dfrac{5-3}{2},\ \dfrac{-2-8}{2}\right)$ より M$(\mathbf{1,\ -5})$

【5】



【6】(1) $y = ax$ とすると，$x = 5$，$y = 12$ を代入して，

$12 = 5a$ より，$a = \frac{12}{5}$

よって，$\boldsymbol{y = \frac{12}{5}x}$

$x = 8$ を代入して，$\boldsymbol{y = \frac{96}{5}}$

(2) $y = ax$ とすると，$x = -2$，$y = -7$ を代入して，

$-7 = -2a$ より，$a = \frac{7}{2}$

よって，$\boldsymbol{y = \frac{7}{2}x}$

$y = 16$ を代入して，$\boldsymbol{x = \frac{32}{7}}$

(3) $y = \frac{a}{x}$ とおくと，$x = -1$，$y = 5$ を代入して，

$5 = \frac{a}{-1}$ より，$a = -5$

よって，$\boldsymbol{y = -\frac{5}{x}}$

$x = 3$ を代入して，$\boldsymbol{y = -\frac{5}{3}}$

(4) $y = \frac{a}{x}$ とおくと，$x = 4$，$y = -\frac{1}{2}$ を代入して，

$-\frac{1}{2} = \frac{a}{4}$ より，$a = -2$

よって，$\boldsymbol{y = -\frac{2}{x}}$

$y = 6$ を代入して，$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$

【7】(1) ① $\boldsymbol{y = \frac{8}{x}}$　② $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$　③ $\boldsymbol{y = -\frac{4}{x}}$　④ $\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x}$

(2) ②，④

(3) ①，③

(4) $(-1,\ -8)$，$(-2,\ -4)$，$(-4,\ -2)$，$(-8,\ -1)$ の **4 個**

【8】(1) P の速さは，$60 \div 30 =$ **2 (cm/s)**

Q の速さは，$30 \div 30 =$ **1 (cm/s)**

(2) 動き始めてから 12 秒後は，(1) より，

$\mathrm{AP} = 2 \times 12 = 24$ (cm)

$\mathrm{BQ} = 1 \times 12 = 12$ (cm)

よって，台形 ABQP の面積は，

$(24 + 12) \times 20 \div 2 =$ **360 ($\mathbf{cm^2}$)**

(3) 動き始めてから x 秒後は,

$\mathrm{AP} = 2x$ (cm), $\mathrm{BQ} = x$ (cm)

よって,

$y = (2x + x) \times 20 \div 2$

$\boldsymbol{y = 30x}$

また，P は出発してから 30 秒後に D に着くので,

$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 30}$

【9】(1) P(2, 4) を通るから，$\boldsymbol{y = 2x}$

(2) P(2, 4) を通るから，$\boldsymbol{y = \dfrac{8}{x}}$

(3) $\mathrm{PQ} = 4$, $\mathrm{OQ} = 2$ より,

長方形 $\mathrm{OQPR} = 2 \times 4 = \boldsymbol{8}$

(4) 求める直線は，線分 PS の中点を通る.

P(2, 4), S(−4, 0) の中点を M とすると,

$\mathrm{M}\left(\dfrac{2-4}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right) = (-1,\ 2)$

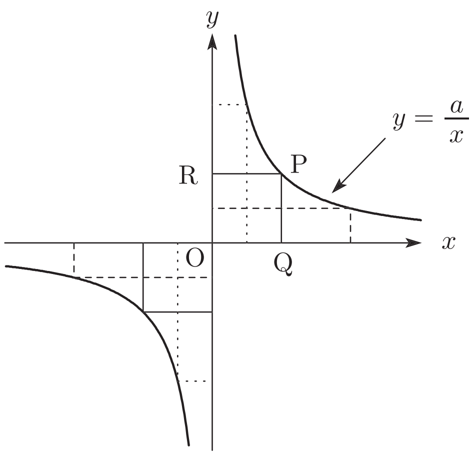
よって，直線 OM の式は,

$\boldsymbol{y = -2x}$

＜参考＞

反比例の式 $y = \dfrac{a}{x}$，すなわち $xy = a$ は，グラフ上の点から両軸にひいた 2 つの垂線の積が一定であることを表している.

よって，$y = \dfrac{a}{x}$ 上の点 P から，両軸に垂線 PQ，PR をひいて長方形 OQPR をつくるとき，長方形 OQPR の面積はつねに a となる.



【10】(1) $y=\dfrac{a}{x}$ に (1, 6) を代入して，$\boldsymbol{a=6}$

(2) 点 C の y 座標は 0 だから，点 M の y 座標は，

$$\frac{6+0}{2}=3$$

よって，$y=\dfrac{6}{x}$ に $y=3$ を代入すると，

$x=2$　　M**(2, 3)**

(3) D は y 座標について M と対称な点であるから，

D(−2, 3)

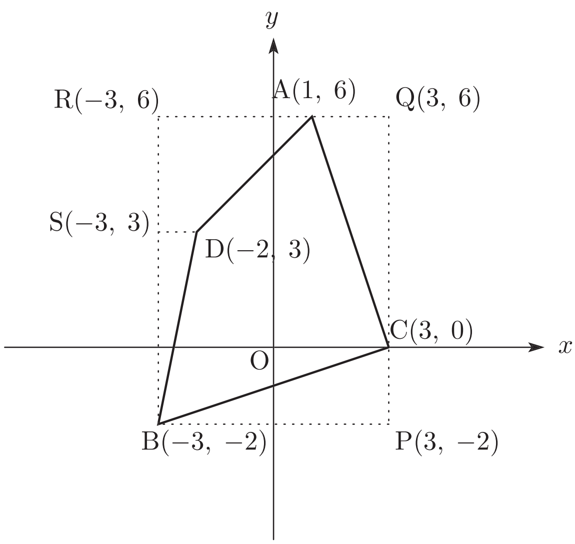
AC の中点が M だから，C の x 座標は 3

B は $y=\dfrac{6}{x}$ 上にあり，x 座標が −3 であるから，

B(−3, −2)

よって，下の図で，

$$\begin{aligned}\text{四角形 ADBC} &= \text{長方形 RBPQ} - (\triangle\text{PBC} + \triangle\text{QCA} + \text{台形 ARSD} + \triangle\text{BDS})\\ &= 6\times 8-\frac{1}{2}\{6\times 2+6\times 2+(4+1)\times 3+1\times 5\}\\ &= \boldsymbol{26}\end{aligned}$$



【11】(1) ① $\boldsymbol{y-3=a(x+2)}$

$y-3=a(x+2)$ に $x=3$，$y=18$ を代入して，

$15=5a$ より，$\boldsymbol{a=3}$

② $y-3=3(x+2)$ より，$\boldsymbol{y=3x+9}$

③ ② に $y=27$ を代入して，

$27=3x+9$ より，$\boldsymbol{x=6}$

(2) $y=\dfrac{a}{x^2}$ とおいて，$x=-2$，$y=6$ を代入して，

$6=\dfrac{a}{(-2)^2}$ より，$a=24$

$y=\dfrac{24}{x^2}$ に $x=3$ を代入して，$y=\dfrac{24}{9}=\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$

(3) $y-1=\dfrac{a}{x+5}$ とおいて，$x=-2$，$y=7$ を代入して，

$7-1=\dfrac{a}{-2+5}$ より，$a=18$

$y-1=\dfrac{18}{x+5}$ に $x=4$ を代入して，$y-1=\dfrac{18}{9}$

よって，$\boldsymbol{y=3}$

(4) 反比例の性質を利用する．

x の値が 25 %増加するということは，

$1+\dfrac{25}{100}=\dfrac{5}{4}$（倍）

になるということだから，y の値は $\dfrac{4}{5}$ 倍になる．

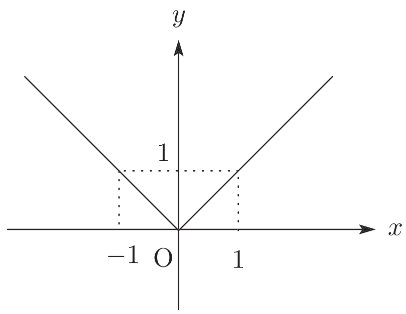
$\dfrac{4}{5}=1-\dfrac{20}{100}$ より，**20%減少**

(5) $y=|x|$ のグラフは，

$x \geqq 0$ のときは $y=x$ と重なり，

$x<0$ のときは $y=-x$ と重なる．

よって，右の図の通り．



問題

【1】(1) P の x 座標が OQ なので，OQ= $\boldsymbol{t}$ **(cm)**

P の y 座標が OR なので，OR= $\boldsymbol{\dfrac{6}{t}}$ **(cm)**

(2) 四角形 OQPR=OQ×OR= $t \times \dfrac{6}{t} = \mathbf{6}$ $\mathbf{(cm^2)}$

【2】(1) ① $y = ax$ に (2，6) を代入して，$6 = 2a$

よって，$a = 3$ より，$\boldsymbol{y = 3x}$

② $y = \dfrac{b}{x}$ に (2，6) を代入して，$6 = \dfrac{b}{2}$

よって，$b = 12$ より，$\boldsymbol{y = \dfrac{12}{x}}$

(2) （ア）$0 < t < 6$ のとき，

点 P は直線 $y = 3x$ 上にあるから，

$\mathrm{OQ} = t$ とすると，

$t = 3x$ より，$x = \dfrac{t}{3}$

よって，PQ= $\dfrac{t}{3}$ だから，

$S = \dfrac{1}{2} \times t \times \dfrac{t}{3}$

$\boldsymbol{S = \dfrac{t^2}{6}}$

（イ）$t \geqq 6$ のとき，

点 P は双曲線 $y = \dfrac{12}{x}$ 上にあるから，

OQ= t とすると，

$t = \dfrac{12}{x}$ より，$x = \dfrac{12}{t}$

よって，PQ= $\dfrac{12}{t}$ だから，

$S = \dfrac{1}{2} \times t \times \dfrac{12}{t}$

$\boldsymbol{S = 6}$

【3】(1)　点 A は m 上の点より，$y=-\dfrac{8}{x}$ に $x=-4$ を代入して，

$$y=-\frac{8}{-4} \text{ より，} y=2$$

よって，点 A の y 座標は **2**

(2)　ℓ は点 A を通る直線であるから，$y=ax$ に $x=-4$，$y=2$ を代入して，

$$2=-4a \text{ より，} a=-\frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x}$

(3)　点 B は点 A と原点に関して対称な点であるから，

点 B**(4，−2)**

(4) ①　△ OPA と△ OPB は OP を底辺とする三角形である．

よって，△ ABP の面積は，

$p=2$ のとき，$\dfrac{1}{2}\times 2\times(4+4)=\mathbf{8}$

$p=-4$ のとき，$\dfrac{1}{2}\times 4\times(4+4)=\mathbf{16}$

②　$\dfrac{1}{2}\times p\times(4+4)=\boldsymbol{4p}$

③　$p>0$ のとき，$4p=20$ より，$p=5$

$p<0$ のとき，△ ABP の面積は，

$$\frac{1}{2}\times(-p)\times(4+4)=-4p$$

よって，$-4p=20$ より，$p=-5$

よって，$p=$ **5，−5**

【4】(1)　$y=\dfrac{a}{x}$ ……①，$z=\dfrac{b}{y}$ ……②（a，b は定数）とおくことができる．

① を ② に代入すると

$$z=\frac{b}{\frac{a}{x}}=b\times\frac{x}{a} \quad \text{［割り算は逆数の積になるので］}$$

$$=\frac{b}{a}x$$

つまり z は x に比例する．

比例定数をあらためて k とおくと $\left(\dfrac{b}{a}=k \text{ とおいた}\right)$

$$z=kx$$

$x=12$ のとき，$z=-3$ なので

$$-3=12k \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{4}$$

よって，$z=-\dfrac{1}{4}x$

$x=-9$ を代入すると，$\boldsymbol{z=\dfrac{9}{4}}$

(2) $y=\dfrac{a}{x+3}\cdots\cdots①$

$z-4=by\cdots\cdots②$

とおくことができる（a，b は定数）.

① を ② に代入すると

$$z-4=\frac{ab}{x+3}$$

つまり $z-4$ は $x+3$ に反比例する．$ab=k$ とおくと

$$z-4=\frac{k}{x+3}$$

$x=-4$ のとき，$z=5$ なので

$$5-4=\frac{k}{-4+3}\qquad\therefore\ 1=\frac{k}{-1}\qquad k=-1$$

よって

$$z-4=-\frac{1}{x+3}$$

となる．$z=3$ を代入すると

$$3-4=-\frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{x+3}=1$$

$$\therefore\ x+3=1$$

$$\boldsymbol{x=-2}$$

【5】a は b に反比例し，c は a に比例しているので

$$a=\frac{p}{b},\ c=qa\qquad (p,\ q \text{ は比例定数})$$

という関係が成り立つ.

(1) $a=3$，$b=12$ を，$a=\dfrac{p}{b}$ に代入すると

$3=\dfrac{p}{12}$ より，$p=36$

よって，$a=\dfrac{36}{b}$ より，$\boldsymbol{b=\dfrac{36}{a}}$

(2) $\begin{cases} a=\dfrac{p'}{b}\cdots\cdots\cdots① \\ c=q'a\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$

とおくと，①を②に代入すると，

$$c=q'\times\frac{p'}{b}=\frac{p'q'}{b}$$

この式に，$b=3$，$c=12$ を代入すると，

$12=\dfrac{p'q'}{3}$ より，$p'q'=36$

よって，$\boldsymbol{c=\dfrac{36}{b}}$

(3) ②より b と c は反比例の関係にあるから，

$b = x$ のとき $c = 3$，$b = 4$ のとき $c = 5$ より

$$3 \times x = 4 \times 5$$

$$x = \frac{20}{3}$$

a と b も反比例の関係にあるから

$$2 \times \frac{20}{3} = y \times 4$$

$$y = \frac{10}{3}$$

$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{20}{3}}$，$\boldsymbol{y = \frac{10}{3}}$

【6】a 時間 b 分 $= a + \dfrac{b}{60}$(時間) と表せるから，

$$\begin{aligned} t &= S \div \left(a + \frac{b}{60}\right) \\ &= S \times \frac{60}{60a + b} \\ &= \boldsymbol{\frac{60S}{60a+b}} \ \textbf{(km/h)} \end{aligned}$$

【7】(1) a) $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

b) 変化したあとの半径，高さを r'，h' とすると

$$r' = \frac{3}{2}r,\ h' = \frac{4}{3}h$$

変化後の体積 V' は

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3}\pi r'^2 \times h' = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}r\right)^2 \times \frac{4}{3}h \\ &= \frac{1}{3}\pi \times \frac{9}{4}r^2 \times \frac{4}{3}h \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 3r^2 h \\ &= 3 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= 3V \end{aligned}$$

よって，**3 倍**になる．

c) $r' = ar$，$h' = br$ のときなので

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3}\pi r'^2 h' = \frac{1}{3}\pi(ar)^2 \times bh \\ &= a^2 b \times \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= a^2 bV \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a^2 b}$ **倍**になる．

(2) a) S が一定のとき，a を h の式で表すと

$$\frac{1}{2}ah = S$$
$$ah = 2S$$
$$a = \frac{2S}{h}$$

$h' = 2h$ とおくと，変化後の底辺の長さ a' は

$$a' = \frac{2S}{2h} = \frac{S}{h} = \frac{1}{2} \times \frac{2S}{h} = \frac{1}{2}a$$

よって，$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **倍**になる．

b) h が一定のとき，a を S の式で表すと

$$\frac{1}{2}ah = S$$
$$ah = 2S$$
$$a = \frac{2}{h} \times S$$

$S' = 3S$ とおくと，変化後の底辺の長さ a' は

$$a' = \frac{2}{h} \times 3S = 3 \times \frac{2}{h}S = 3a$$

よって，**3 倍**になる．

c) a が一定のとき，h を S の式で表すと

$$\frac{1}{2}ah = S$$
$$h = \frac{2}{a} \times S$$

$S' = S + 1$ とおくと，変化後の高さ h' は

$$\begin{aligned} h' &= \frac{2}{a}S' = \frac{2}{a}(S+1) \\ &= \frac{2}{a}S + \frac{2}{a} \\ &= h + \frac{2}{a} \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\frac{2}{a}}$ だけ増える．

(3) $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}\pi x^3}$

$x' = 1.05x$ とおくと，変化後の体積 y' は

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4}{3}\pi \times (1.05x)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1.05^3 \times x^3 \\ &= 1.05^3 \times \frac{4}{3}\pi x^3 = 1.157625y \end{aligned}$$

小数点以下第 3 位を四捨五入して，**15.76 %増える**．

【8】(1) 制限速度 80km/h の区間が $x$km のとき，100km/h の区間は $(46-x)$km であるから，

$$\frac{x}{80}+\frac{46-x}{100}\leqq\frac{30}{60}$$
$$5x+4(46-x)\leqq 200$$
$$\boldsymbol{x\leqq 16}$$

(2) 80km/h で走る時間が y 分のとき，その距離は $80\times\dfrac{y}{60}=\dfrac{4}{3}y$(km).

つまり 80km/h で走った y 分と，100km/h で $\left(46-\dfrac{4}{3}y\right)$km 走った時間の合計が 30 分以内であればよいので，

$$\frac{y}{60}+\left(46-\frac{4}{3}y\right)\div 100\leqq\frac{30}{60}$$
$$\frac{y}{60}+\frac{23}{50}-\frac{y}{75}\leqq\frac{1}{2}$$
$$10y+12\times 23-8y\leqq 300$$
$$10y+276-8y\leqq 300$$
$$2y\leqq 24$$
$$\boldsymbol{y\leqq 12}$$

【9】(1) 点 P の x 座標を p とすると，その y 座標は $y=ax$ に $x=p$ を代入して

$$y=ap$$
$$\therefore\ \triangle\,\mathrm{OPB}=\frac{1}{2}\times p\times ap=\frac{1}{2}ap^2\ \cdots\cdots ①$$

x 座標が $2p$ となると，y 座標は $y=a\times 2p=2ap$

$$\therefore\ \triangle\,\mathrm{OPB}=\frac{1}{2}\times 2p\times 2ap=\frac{1}{2}\times 4ap^2=4\times\frac{1}{2}ap^2\ \cdots\cdots ②$$

①，② より面積は **4 倍**となる.

(2) $y=ax$ と $y=\dfrac{a}{x}$ の交点を求めると

$$ax=\frac{a}{x}$$

両辺を a でわると $(a\fallingdotseq 0)$

$$x=\frac{1}{x}$$
$$\therefore\ x^2=1$$
$$x=1\quad(x>0\ より)$$

点 A の x 座標を p とおくと，$\mathrm{A}\left(p,\ \dfrac{a}{p}\right)$ とかける.

(i) $0 < p \leqq 1$ のとき（図 1）

$T = \triangle\,\mathrm{OPB} = \dfrac{1}{2}ap^2$

が長方形 OBAC の半分になるときなので

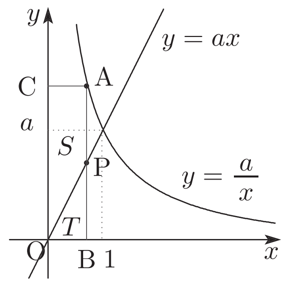
$$\frac{1}{2}ap^2 = \frac{1}{2} \times \left(p \times \frac{a}{p}\right)$$

$$\frac{1}{2}ap^2 = \frac{1}{2}a$$

$$\therefore\ p^2 = 1$$

よって，$p = 1$（$p > 0$ より）

(図 1)



(ii) $1 < p$ のとき（図 2）

図 2 で $y = ax$ と AC の交点を Q とすると，点 Q の y 座標が $\dfrac{a}{p}$．これが $y = ax$ 上にあるので

$$\frac{a}{p} = ax \qquad \therefore\ x = \frac{1}{p}$$

$$\therefore\ S = \triangle\,\mathrm{OQC}$$

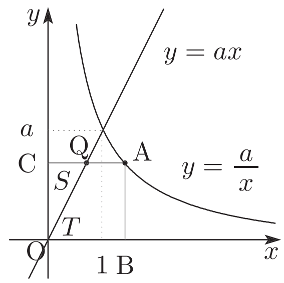
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} \times \frac{a}{p} = \frac{a}{2p^2}$$

これが長方形 OBAC の $\dfrac{1}{2}$ なので

$$\frac{a}{2p^2} = \frac{1}{2} \times \left(p \times \frac{a}{p}\right) = \frac{a}{2}$$

このとき $p^2 = 1$ だが，$1 < p$ では解なし

(図 2)



(i)，(ii) より $p = 1$

つまり A の座標は $\boldsymbol{(1,\ a)}$ となる．

(3) (2) より $S > T$ となるときは，$p < 1$ のとき（図 1）である．

$S : T = 7 : 1$ のとき，

$(S + T) : T = 8 : 1$ となるので

四角形 OBAC : $\triangle$ OPB $= 8 : 1$

$$a : \frac{1}{2}ap^2 = 8 : 1$$

$$4ap^2 = a$$

両辺を$4a$ で割って

$$p^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ p = \frac{1}{2} \quad (p > 0)$$

$$\therefore\ \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2},\ 2a}\right)$$

(4) (2) より $S<T$ となるときは，$1<p$ のとき（図 2）である．

$S:T=1:7$ のとき，

$S:(S+T)=1:8$ となるので

$$\triangle \mathrm{OQC} : \text{四角形}\,\mathrm{OBAC} = 1:8$$

$$\frac{a}{2p^2} : a = 1:8$$

$$\frac{4a}{p^2} = a$$

$$\frac{4}{p^2} = 1$$

$$4 = p^2$$

$$p = 2 \ (p>0)$$

$$\therefore\ \mathbf{A}\left(\mathbf{2},\ \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)$$

【10】(1) A 町から B 町までの道のりは，

$$60 \times \left(3+\frac{20}{60}\right) = 200(\mathrm{km})$$

よって，$\boldsymbol{y = \frac{200}{x}}$

(2) $y=\frac{200}{x}$ に $x=45$ を代入して，

$$y = \frac{200}{45} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{9}}\ (\text{時間})$$

(3) $y=\frac{200}{x}$ に $x=a$，$y=b$ と $x=3a$，$y=b-\left(2+\frac{40}{60}\right)$ をそれぞれ代入すると，

$$b = \frac{200}{a} \cdots\cdots ①$$

$$b - \frac{8}{3} = \frac{200}{3a} \cdots\cdots ②$$

となる．この連立方程式を解いて，$\boldsymbol{a=50}$，$\boldsymbol{b=4}$

問題

【1】(1) $\angle \boldsymbol{a}$ と $\angle \boldsymbol{b}$

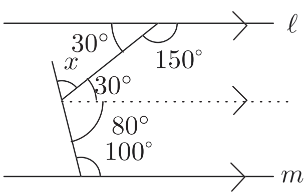
(2) $\angle \boldsymbol{b}$ と $\angle \boldsymbol{c}$，$\angle \boldsymbol{a}$ と $\angle \boldsymbol{e}$

(3) $\angle \boldsymbol{a}$ と $\angle \boldsymbol{c}$，$\angle \boldsymbol{d}$ と $\angle \boldsymbol{f}$，$\angle \boldsymbol{b}$ と $\angle \boldsymbol{e}$

(4) $\angle \boldsymbol{e}$ と $\angle \boldsymbol{d}$，$\angle \boldsymbol{c}$ と $\angle \boldsymbol{d}$

【2】

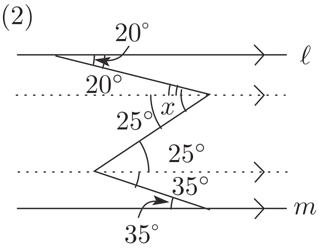
(1)



$\angle x = 180^\circ - (30^\circ + 80^\circ)$

$= \mathbf{70^\circ}$

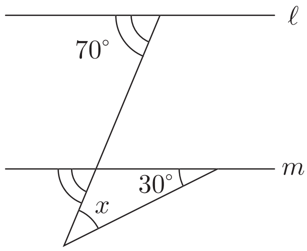
(2)



$\angle x = 25^\circ + 20^\circ$

$= \mathbf{45^\circ}$

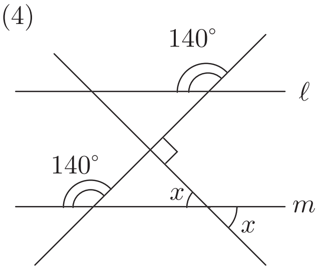
(3)



$\angle x = 70^\circ - 30^\circ$

$= \mathbf{40^\circ}$

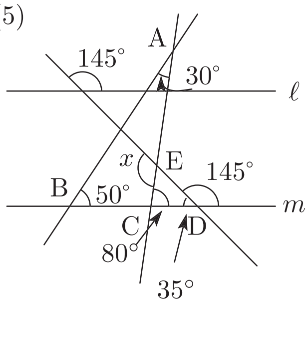
(4)



$\angle x = 140^\circ - 90^\circ$

$= \mathbf{50^\circ}$

(5)



右図のように A〜E を決める.

△ ABC で，$\angle \mathrm{ACD} = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$

△ CDE で，$\angle x = 35^\circ + 80^\circ = \mathbf{115^\circ}$

【3】**(答) (1)，(4)，(6)**

≪理由≫

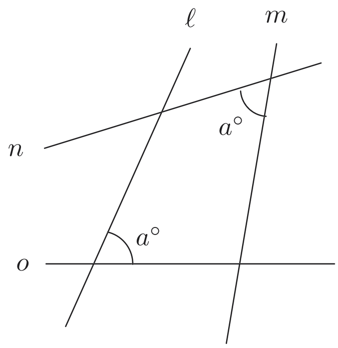
(1) 錯角が等しいから．

(4) 同側内角の和が $180°$ だから．

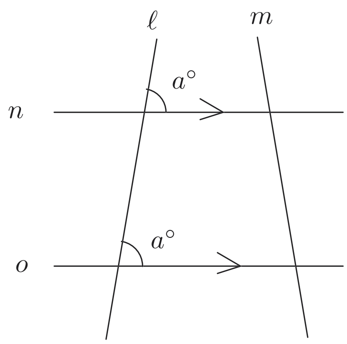
(6) 一方の角の対頂角が他方の同位角になっている．同位角が等しくなるので平行となる．

その他の選択肢は，次の理由により平行であるとはいえない．

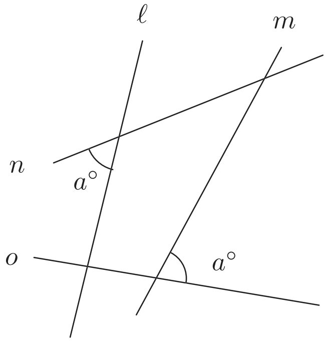
(2) n と o が平行でないときは，ℓ と m は平行にならない．
この 2 つは錯角や同位角の関係にない．



(3) 同位角が等しいので，n と o が平行であることはいえるが，ℓ と m は平行でないこともある．



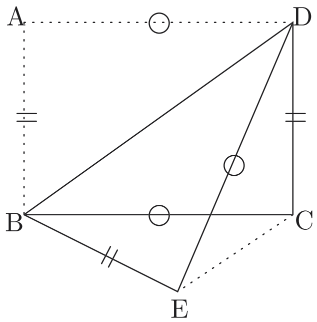
(5) n と o が平行でないと，ℓ と m は平行にならない．
この 2 つは錯角や同位角の関係にない．



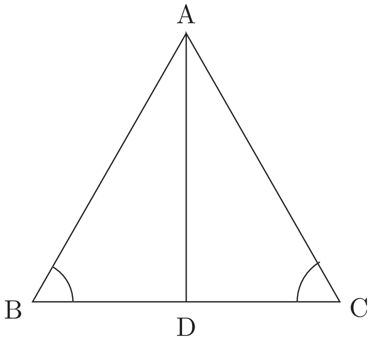
【4】△ **ABC** ≡ △ **ONM (3 辺相等)**
△ **DEF** ≡ △ **TUS (2 辺夾角相等)**
△ **GHI** ≡ △ **WVX (1 辺両端角相等／ 2 角夾辺相等)**
（△ JKL と△ PQR は三角形の形が決まらない．）

【5】ア **AB // CD**　イ △ **OAB≡** △ **ODC**　ウ △ **ODC**
エ **仮定**　オ **錯角**　カ **∠ODC**
キ **∠ABO**　ク **∠DCO**
ケ **1 辺両端角相等（2 角夾辺相等）**
コ △ **ODC**

【6】四角形 ABCD は長方形だから，
AB=DC，AD=BC
△ EBD は△ ABD を折り返したものだから，
△ EBD≡ △ ABD
よって
EB=AB=DC ⋯⋯①
ED=AD=BC ⋯⋯②
△ BEC と△ DCE において，
① より
EB=CD
② より
BC = DE
CE = EC (共通)
よって，3 辺がそれぞれ等しいから，
△ BEC≡ △ DCE　（証明終）



【7】∠A の二等分線が BC と交わる点を D とする．



△ ABD と△ ACD において，

仮定より，

$\angle ABD = \angle ACD$ ···①

作図より，

$\angle DAB = \angle DAC$ ···②

また，

AD は共通 ···③

①，② と，三角形の内角の和は等しいことより，

$\angle ADB = \angle ADC$ ···④

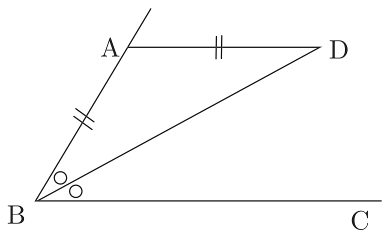
②，③，④ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

合同な図形の対応する辺は等しいので，

$AB = AC$ （証明終）

【8】仮定 $AB = AD$ より，二等辺三角形の底角は等しいので，



$\angle ABD = \angle ADB$ ···①

一方，仮定より，

$\angle ABD = \angle CBD$ ···②

①，② より，

$\angle ADB = \angle CBD$

よって，錯角が等しい 2 つの直線は平行だから，$AD \mathbin{/\!/} BC$ （証明終）

【9】仮定 $AD /\!/ PQ$ より

平行線の錯角は等しいから，$\angle QPA = \angle DAP$ ······①

また，平行線の同位角は等しいから，$\angle PQA = \angle DAC$ ······②

一方，仮定より，AD は ∠BAC の二等分線なので

$\angle DAP = \angle DAC$ ······③

①，②，③ より

$\angle QPA = \angle DAP$ ［①より］

$= \angle DAC$ ［③より］

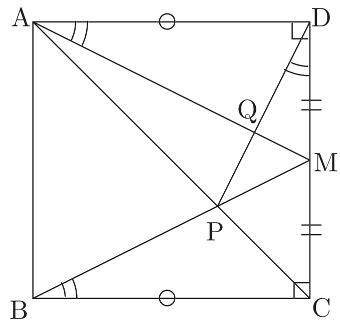
$= \angle PQA$ ［②より］

よって，△ APQ において 2 つの角が等しくなる．

2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形なので

$AP = AQ$ （証明終）

【10】△ AMD と△ BMC において，



正方形 ABCD の 1 辺より

　AD=BC ……①

正方形 ABCD の内角より

　∠ADM=∠BCM= 90° ……②

また，仮定より

　DM=CM ……③

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ AMD≡ △ BMC

よって，∠DAM=∠CBM ……④

△ BCP と△ DCP において，

正方形 ABCD の 1 辺より

　BC=DC ……⑤

　CP は共通 ……⑥

AC は正方形 ABCD の対角線だから

　∠BCP=∠DCP= 45° ……⑦

⑤，⑥，⑦ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ BCP≡ △ DCP

よって，∠CBP=∠CDP ……⑧

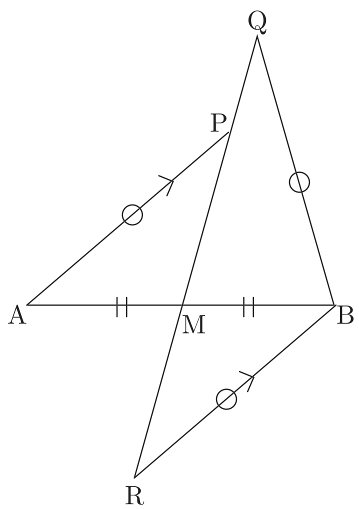
④，⑧ より，∠DAM=∠MDP

また，∠DAM+∠AMD= 90° であることから，

　∠MDP+∠AMD= 90°

したがって，∠DQM= 90° となるので，AM⊥DP　（証明終）

【11】右の図のように，QM の延長上に PA//BR となる点 R をとる．



△ MAP と△ MBR において，

　AM=BM（仮定）

　∠AMP=∠BMR（対頂角）

　∠MAP=∠MBR（錯角）

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

　△ MAP≡ △ MBR

よって，

　∠APM=∠BRM ……①

　AP=BR

ここで，AP=BQ より，BQ=BR

△ BQR は二等辺三角形となるから，

　∠BQM=∠BRM ……②

①，② より，∠APM=∠BQM　（証明終）

【12】 (1) △BEC と△DFC において，

BC=DC（正方形の辺）

EC=FC（正方形の辺）

∠BCE=∠DCF（= 90°+∠DCE）

よって，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△BEC≡△DFC

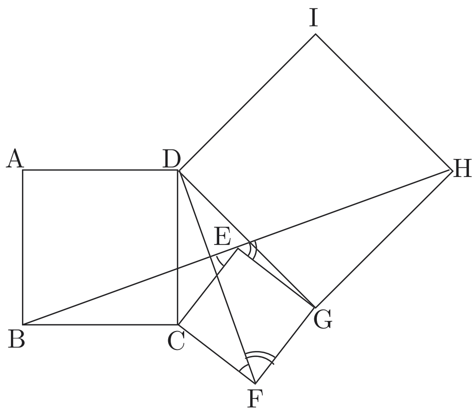
ゆえに，

BE=DF ……①

同様に，△DGF≡△HGE だから，

DF=HE ……②

①，② より，BE=EH （証明終）



(2) (1) より，

△BEC≡△DFC ……③

△DGF≡△HGE ……④

③ より，∠BEC=∠DFC

④ より，∠DFG=∠HEG

ここで，∠DFC+∠DFG= 90° より，

∠BEC + ∠HEG = 90°

よって，

∠BEC+∠CEG+∠GEH

=(∠BEC+∠GEH)+∠CEG

= 90° + 90°

= 180°

ゆえに，3 点 B，E，H は一直線上にある． （証明終）

4章　合同と証明（2）

問題

【1】△ ABB′ と△ CAC′ で，

△ ABC は直角二等辺三角形であるから，

AB=CA ……①

$\angle ABB' + \angle B'AB = 90°$，$\angle CAC' + \angle B'AB = 90°$

より，

$\angle ABB' = \angle CAC'$ ……②

$\angle AB'B = \angle CC'A = 90°$ ……③

①，②，③ より，直角三角形において，

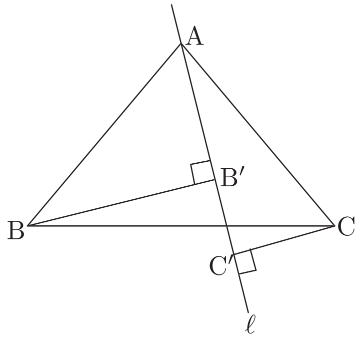
斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから，

△ ABB′≡△ CAC′

よって，AB′ =CC′，BB′ =AC′ だから，

$B'C' = AC' - AB'$

$= BB' - CC'$　（証明終）



【2】△ ABE において，

$\angle BAE = 45°$，$\angle AEB = 90°$ より，$\angle ABE = 45°$

$\angle BAE = \angle ABE$ より，

AE=BE ……①

また，△ AFE において，$\angle AEF = 90°$ より，

$\angle EAF + \angle AFE = 90°$（仮定）

さらに，△ BFD において，$\angle BDF = 90°$ より，

$\angle FBD + \angle BFD = 90°$（仮定）

また，$\angle AFE = \angle BFD$（対頂角）

よって，$\angle EAF = \angle EBC$ ……②

△ AFE と△ BCE において，

① より，AE=BE

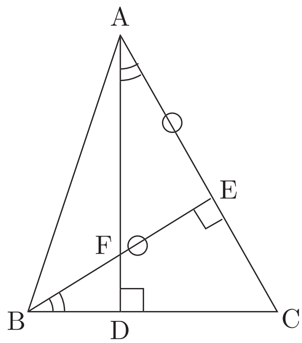
② より，$\angle EAF = \angle EBC$

仮定より，$\angle AEF = \angle BEC = 90°$

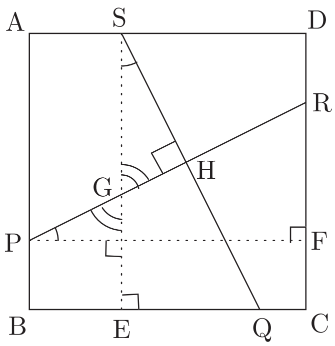
以上より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ AFE≡△ BCE

よって，AF=BC　（証明終）



【3】右図のように，点 S，P から辺 BC，CD にそれぞれ垂線を下ろし，その足を E，F とする．
SE と PR の交点を G，PR と SQ の交点を H とするとき，



$\angle$HSG$+\angle$SGH$=90^\circ$

$\angle$SGH$=\angle$PGE（対頂角）

$\angle$PGE$+\angle$GPF$=90^\circ$

よって，$\angle$HSG$=\angle$GPF ······①

△ PRF と△ SQE において，

① より，$\angle$RPF$=\angle$QSE ······②

四角形 PBCF と四角形 ABES は長方形だから

PF=BC，SE=AB（長方形の対辺）

正方形 ABCD の辺だから

AB=BC

よって，PF=SE ······③

作図より，

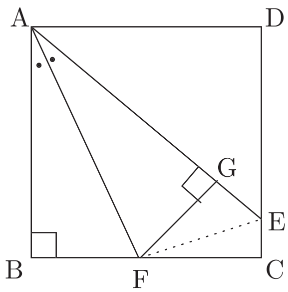
$\angle$PFR$=\angle$SEQ$=90^\circ$ ······④

②，③，④ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ PRF$\equiv$△ SQE

よって，PR=SQ　（証明終）

【4】F から AE に垂線を引き，その交点を G とする．



△ ABF と△ AGF において

仮定および作図より

$\angle ABF = \angle AGF = 90^\circ$

仮定より

$\angle BAF = \angle GAF$

共通な辺であるから

AF=AF

よって，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABF \equiv \triangle AGF$

合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しいので

AB=AG ……①

BF=GF ……②

① と仮定より

$$\begin{aligned} AE &= AB + CE &&［仮定］\\ &= AG + CE &&［①より］\end{aligned}$$

$\therefore\ CE = AE - AG = GE$ ……③

すると△ GEF と△ CEF において

$\angle EGF = \angle ECF = 90^\circ$

GE=CE　［③ より］

EF=EF　［共通］

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

$\triangle GEF \equiv \triangle CEF$

合同な図形の対応する辺は等しいので

GF=CF ……④

②，④ より

BF=GF=CF

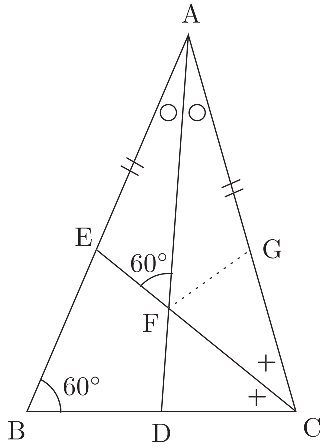
よって，F は BC の中点である．　（証明終）

【5】 (1) △ ABC で，$\angle$BAC+$\angle$BCA$= 180° - \angle$B$= 120°$

よって，△ FAC で，

$\angle$FAC+$\angle$FCA$= \dfrac{1}{2} \times 120° = 60°$

ゆえに，$\angle$AFC$= 180° - 60° = \mathbf{120°}$



(2) $\angle$AFC の二等分線が AC と交わる点を G とする．

$\angle$AFC $= 120°$，$\angle$AFG $= \angle$CFG より，

$\angle$AFG $= \angle$CFG $= 60°$ $\cdots$①

一方，$\angle$AFC $= 120°$ より，

$\angle$AFE $= 180° - \angle$AFC $= 60°$ $\cdots$②

$\angle$CFD $= 180° - \angle$AFC $= 60°$ $\cdots$③

△ AFE と△ AFG において，仮定より，

$\angle$EAF $= \angle$GAF $\cdots$④

①，② より，

$\angle$AFE $= \angle$AFG $= 60°$ $\cdots$⑤

また，

AF は共通 $\cdots$⑥

④，⑤，⑥ より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，

△ AFE$\equiv$ △ AFG

合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しいので，

AE $=$ AG $\cdots$⑦

△ CFD と△ CFG においても，同様にして△ CFD$\equiv$ △ CFG であることが示せるので，

CD $=$ CG $\cdots$⑧

⑦，⑧ より，

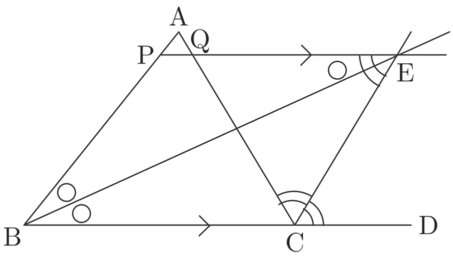
AE $+$ CD $=$ AG $+$ CG $=$ AC　（証明終）

【6】 PE//BC より，

$\angle$PEB$=\angle$CBE$=\angle$PBE

よって，△ PBE は二等辺三角形となるから，

PB=PE $\cdots\cdots$①



同様に，$\angle$QEC$=\angle$DCE$=\angle$QCE

よって，△ QCE は二等辺三角形となるから，

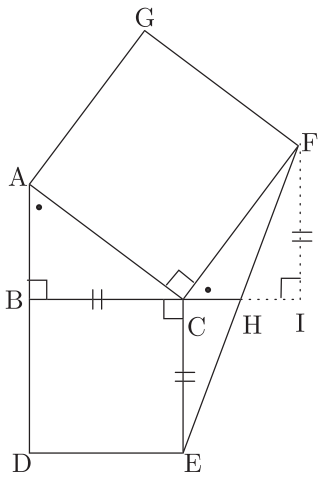
QE=QC $\cdots\cdots$②

①，② より，

PQ $=$ PE $-$ QE

$=$ PB $-$ QC　（証明終）

【7】右の図のように，BC の延長上に F から垂線 FI を下ろすと，



△ ABC と△ CIF において，

AC=CF ……①

∠ABC=∠CIF= 90° ……②

また，

∠BCA+∠FCI= 90°

∠BCA+∠CAB= 90°

より，∠CAB=∠FCI ……③

①，②，③ より，直角三角形において，斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから，

△ ABC≡ △ CIF

よって，

CI=AB= 3 ……④

FI=CB= 4

△ HCE と△ HIF において，

CE=IF ……⑤

∠HCE=∠HIF= 90° ……⑥

⑥ より，CE//FI だから，

∠HEC=∠HFI ……⑦

⑤，⑥，⑦ より，1 辺と両端の角がそれぞれ等しいから，

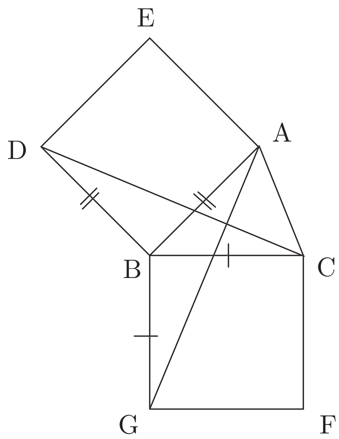
△ HCE≡ △ HIF

よって，CH=IH

これと ④ より，

$\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\mathrm{CI}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

【8】△ DBC と△ ABG において



四角形 ABDE は正方形より，各辺の長さはすべて等しいから

DB=AB ……①

四角形 BCFG も正方形なので，同様に

BC=BG ……②

正方形の 1 つの角は全て 90° であるから，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{DBC} &= \angle \mathrm{DBA} + \angle \mathrm{ABC}\\ &= 90^\circ + \angle \mathrm{ABC}\\ &= \angle \mathrm{GBC} + \angle \mathrm{ABC}\\ &= \angle \mathrm{ABG} \quad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

①，②，③ より，2 つの辺とその間の角がそれぞれ等しいから

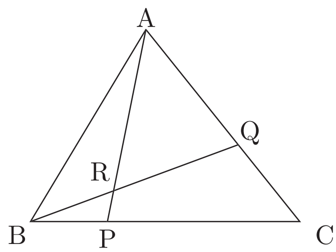
△ DBC≡△ ABG

合同な図形の対応する辺の長さは等しいから

DC=AG　（証明終）

＜参考＞ △ DBC を時計回りに 90° 回転したものが△ ABG となっている．

【9】△ ABP と△ BCQ において



正三角形の 3 辺の長さは等しいので

AB=BC ……①

仮定より

BP=CQ ……②

正三角形の内角は 60° なので

∠ABP=∠BCQ= 60° ……③

①，②，③ より，2 つの辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ ABP≡△ BCQ

合同な図形の対応する角は等しいから

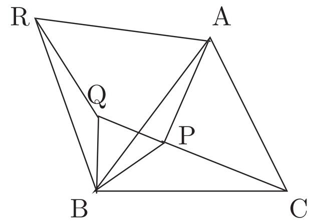
∠PAB=∠QBC ……④

一方，△ ABR において，三角形の 2 つの内角の和は，他の 1 つの角の外角に等しいから，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{ARQ} &= \angle \mathrm{ABR} + \angle \mathrm{BAP}\\ &= \angle \mathrm{ABR} + \angle \mathrm{RBP} \qquad [④より\ \angle \mathrm{BAP} = \angle \mathrm{RBP}]\\ &= \angle \mathrm{ABC} = 60^\circ\end{aligned}$$

よって，∠ARQ は一定（60°）である．　（証明終）

【10】(1) △ RQB と△ APB において



△ BPQ は正三角形で，正三角形の 3 辺の長さは等しいから

$QB=PB$ ……①

同様に△ ABR も正三角形なので

$BR=BA$ ……②

$\angle QBR = \angle RBA - \angle QBA$

$= 60^\circ - \angle QBA$　［正三角形 ABR の 1 つの内角は 60°］

$= \angle QBP - \angle QBA$　［△ BPQ も正三角形］

$= \angle PBA$ ……③

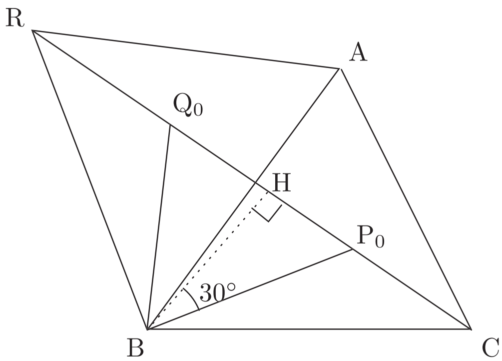
①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

△ RQB≡△ APB

合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しいので

$RQ=AP$　（証明終）

(2)



△ BPQ は正三角形なので

$BP=PQ$ ……④

よって

$AP+BP+CP=RQ+PQ+CP$　［(1) および④より］

となる．つまり AP+BP+CP の長さが最小となるのは，R と C を結ぶ折れ線の長さ RQ+QP+PC が最小となるときである．

2 点間の最短経路は線分なので

すなわち，C と R を結び，B から CR に垂線を下ろして交点を H としたとき

$\angle P_0BH = 30^\circ$

となるように，P_0 を△ ABC の内部の CR 上にとればよい．

1MJSS/1MJS/1MJ
中１選抜東大・医学部数学
中１数学
中１東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	