2MJSS/2MJS/2MJ

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

中２選抜東大・医学部数学

中２数学

中２東大数学

問題

【1】(1)　① $\pm\mathbf{4}$　　② $\mathbf{5}$　　③ ○　　④ $\mathbf{3}$

(2)
① (与式) $= 3\sqrt{2} + 12 - 2 - 4\sqrt{2} = \mathbf{10 - \sqrt{2}}$

② (与式) $= 5 - 4\sqrt{5} + 4 = \mathbf{9 - 4\sqrt{5}}$

③ (与式) $= 12 - 2 = \mathbf{10}$

④ (与式) $= \dfrac{1}{5}(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5}) = \dfrac{1}{5}(25 - 5) = \mathbf{4}$

⑤ (与式) $= \{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})\}^3 = (5 - 2)^3 = \mathbf{27}$

⑥ (与式) $= \{(3 - \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2})\}\{(3 - \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2})\}$

$= 6 \times (-2\sqrt{2})$

$= \mathbf{-12\sqrt{2}}$

⑦ (与式) $= (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$= 6 - 3 + 2\sqrt{6} - 2$

$= \mathbf{1 + 2\sqrt{6}}$

⑧ (与式) $= 2 + 3 + 4 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

$= \mathbf{9 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}$

(3) ①
$$\frac{14}{\sqrt{18}} = \frac{14}{3\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{3\times 2} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{2}}{3}}$$

②
$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

③
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} &= \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4}\\ &= \boldsymbol{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}\\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}\\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}\end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{2}-3+\sqrt{7}} &= \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{2}+\sqrt{7}-3)(\sqrt{2}+\sqrt{7}+3)} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2-9}\\ &= \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{7}+3)}{2+2\sqrt{14}+7-9} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{7}+3)\times\sqrt{14}}{2\times\sqrt{14}\times\sqrt{14}}\\ &= \frac{4(\sqrt{2\times 14}+\sqrt{7\times 14}+3\sqrt{14})}{2\times 14}\\ &= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{7}+7\sqrt{2}+3\sqrt{14}}{7}}\end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned}\frac{12}{2+\sqrt{7}+\sqrt{3}} &= \frac{12(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}\\ &= \frac{12(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{7+4\sqrt{3}-7} = \frac{3(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})}{\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{3}(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}) = \boldsymbol{2\sqrt{3}+3-\sqrt{21}}\end{aligned}$$

【2】(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(2+3)+2\sqrt{2\times 3}}$
$= \boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)-2\sqrt{5\times 2}}$
$= \boldsymbol{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

［$\sqrt{2}-\sqrt{5}$ としないように．根号は正の値を表す］

(3) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$
$=\sqrt{9-2\sqrt{20}}$
$=\sqrt{(5+4)-2\sqrt{5\times 4}}$
$=\sqrt{5}-\sqrt{4}$
$=\boldsymbol{\sqrt{5}-2}$

［$\sqrt{4}$ のままにしないように］

(4) $\sqrt{10+\sqrt{84}}$
$=\sqrt{10+2\sqrt{21}}$
$=\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7\times 3}}$
$=\boldsymbol{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

(5) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times 1}}}{\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$
$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$

(6) $\sqrt{\dfrac{13}{8}-\sqrt{\dfrac{15}{8}}}$
$=\sqrt{\dfrac{13-8\sqrt{\dfrac{15}{8}}}{8}}$
$=\dfrac{\sqrt{13-2\sqrt{16\times\dfrac{15}{8}}}}{2\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{13-2\sqrt{30}}}{2\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{(10+3)-2\sqrt{10\times 3}}}{2\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
$=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}{4}}$

【3】(1)

$$x=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3}=\frac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$$

$$y=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3}=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$$

$\therefore\ x+y=8$

$$xy=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=1$$

① $$\begin{aligned}x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy\\&=64-2\\&=\mathbf{62}\end{aligned}$$

② $$\begin{aligned}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}&=\frac{x^2+y^2}{xy}\\&=\frac{62}{1}\quad［①より］\\&=\mathbf{62}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}x^3+x^2y+xy^2+y^3&=x^2(x+y)+(x+y)y^2\\&=(x+y)(x^2+y^2)\\&=8\times 62\quad［①より］\\&=\mathbf{496}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2&=x-2\sqrt{xy}+y\\&=(x+y)-2\sqrt{xy}\\&=8-2=6\end{aligned}$$

$\therefore\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=\pm\sqrt{6}$

$x<y$ より，

$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\boldsymbol{-\sqrt{6}}$

(2) $a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ より，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

① $$\begin{aligned}a+\frac{1}{a}&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\&=\mathbf{3}\end{aligned}$$

② $$\begin{aligned}a^2+\frac{1}{a^2}&=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\\&=9-2\\&=\mathbf{7}\end{aligned}$$

③ $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\dfrac{1}{a^2}$

$=7-2$ ［②より］

$=5$

$a>\dfrac{1}{a}$ より，$a-\dfrac{1}{a}>0$

よって，$a-\dfrac{1}{a}=\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}a^4-\frac{1}{a^4}&=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\\&=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\\&=\sqrt{5}\times3\times7\\&=\mathbf{21\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(3) $x+y=\sqrt{13}$ より，$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=13$

$x-y=\sqrt{5}$ より，$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=5$

① $$\begin{aligned}(x+y)^2+(x-y)^2&=2(x^2+y^2)\\&=13+5\end{aligned}$$

$\therefore\ x^2+y^2=\mathbf{9}$

② $$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2&=4xy\\&=13-5\\xy&=2\end{aligned}$$

$x^4y^2+x^2y^4=x^2y^2(x^2+y^2)=2^2\times9=\mathbf{36}$

(4) $$\begin{aligned}x+y&=\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}\\&=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}\\&=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}+\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-2\sqrt{2}+2-3}\\&=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{2+\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xy&=\frac{1}{\{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}\{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}}=\frac{1}{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}\\&=\frac{1}{1-(5-2\sqrt{6})}=\frac{1}{2\sqrt{6}-4}\\&=\frac{\sqrt{6}+2}{2\left\{\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2\right\}}=\frac{2+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

① x^2+y^2

$=(x+y)^2-2xy$

$=\dfrac{(2+\sqrt{6})^2}{4}-2\times\dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+2}{4}\times(\sqrt{6}+2-2)$

$=\dfrac{6+2\sqrt{6}}{4}$

$=\mathbf{\dfrac{3+\sqrt{6}}{2}}$

② $x-2xy+y$

$=(x+y)-2xy$

$=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}-2\times\dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$

$=\mathbf{0}$

③ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1}+\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1}$

$=\mathbf{2}$

(5) ① $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore\ 2x=\sqrt{5}+1 \qquad 2x-1=\sqrt{5}$

両辺を 2 乗して,

$4x^2-4x+1=5$

$\therefore\ 4x^2-4x-4=0$

$x^2-x-1=\mathbf{0}$

② ① より，$x^2=x+1$

$\therefore\ x^3=x\times x^2=x(x+1)$ ［①より］

$=x^2+x$

$=(x+1)+x$

$=2x+1$

$=2\times\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+1$

$=\mathbf{\sqrt{5}+2}$

③ $x^5=x^2\times x^3$

$=(x+1)\times(\sqrt{5}+2)$

$=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}\times(\sqrt{5}+2)$

$=\dfrac{5+5\sqrt{5}+6}{2}$

$=\mathbf{\dfrac{11+5\sqrt{5}}{2}}$

(6) $x=\sqrt{9-\sqrt{80}}=\sqrt{9-2\sqrt{20}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}=\sqrt{5}-2$

① $x=\sqrt{5}-2$ のとき，

$$x+2=\sqrt{5}$$
$$x^2+4x+4=5$$
$$x^2+4x=\mathbf{1}$$

②
$$\begin{aligned}&x^4+4x^3+2x^2+12x+1\\=&x^2(x^2+4x)+2x^2+12x+1\\=&x^2+2x^2+12x+1 \quad [\text{①より}]\\=&3x^2+12x+1\\=&3(x^2+4x)+1\\=&3+1 \quad [\text{①より}]\\=&\mathbf{4}\end{aligned}$$

＜② の別解＞

① より，

$$x^2=1-4x$$
$$\begin{aligned}\therefore\ x^3&=x\times x^2\\&=x(1-4x)\\&=x-4x^2\\&=x-4(1-4x)\\&=17x-4\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}x^4&=x\times x^3\\&=17x^2-4x\\&=17(1-4x)-4x\\&=17-72x\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore\ \text{与式}&=17-72x+4(17x-4)+2(1-4x)+12x+1\\&=17-72x+68x-16+2-8x+12x+1\\&=\mathbf{4}\end{aligned}$$

【4】(1) 2 数の差をとると，

$$\begin{aligned}(11\sqrt{3}-\sqrt{11})-9\sqrt{3}&=2\sqrt{3}-\sqrt{11}\\&=\sqrt{12}-\sqrt{11}>0\end{aligned}$$

よって，$\mathbf{11\sqrt{3}-\sqrt{11}>9\sqrt{3}}$

(2)
$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+2+\sqrt{6}$$
$$\sqrt{18+8\sqrt{2}}=\sqrt{18+2\sqrt{32}}=\sqrt{16}+\sqrt{2}=4+\sqrt{2}$$
$$\therefore\ \frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\sqrt{18+8\sqrt{2}}=(\sqrt{2}+2+\sqrt{6})-(4+\sqrt{2})=\sqrt{6}-2=\sqrt{6}-\sqrt{4}>0$$

以上より，$\mathbf{\dfrac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}>\sqrt{18+8\sqrt{2}}}$

(3) それぞれ 2 乗すると，$28-8\sqrt{3}$ と，$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=6+2\sqrt{12}+2=8+4\sqrt{3}$

［$\sqrt{28-8\sqrt{3}}=\sqrt{28-2\sqrt{48}}$ は二重根号をはずせない］

差をとると，

$$\begin{aligned}(28-8\sqrt{3})-(8+4\sqrt{3})&=20-12\sqrt{3}\\&=4(5-3\sqrt{3})\\&=4(\sqrt{25}-\sqrt{27})<0\end{aligned}$$

よって，

$28-8\sqrt{3}<8+4\sqrt{3}$

$\therefore\ \ 28-8\sqrt{3}<(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$

$\boldsymbol{\sqrt{28-8\sqrt{3}}<\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

(4) ［$\sqrt{50-2\sqrt{30}}$，$\sqrt{31+\sqrt{60}}$ は共に二重根号をはずせない］

それぞれ 2 乗して，差をとると，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{50-2\sqrt{30}}\right)^2-\left(\sqrt{31+\sqrt{60}}\right)^2&=50-2\sqrt{30}-31-2\sqrt{15}\\&=19-2(\sqrt{30}+\sqrt{15})\end{aligned}$$

19 と $2(\sqrt{30}+\sqrt{15})$ の大小を比べる．それぞれ 2 乗して，差をとると，

$$\begin{aligned}19^2-4(\sqrt{30}+\sqrt{15})^2&=361-4(30+2\sqrt{30\times15}+15)\\&=361-180-8\times15\sqrt{2}\\&=181-120\sqrt{2}\\&>180-120\sqrt{2}\quad［比較しやすい 180 を基準にしてみた］\\&=60(3-2\sqrt{2})\\&=60(\sqrt{9}-\sqrt{8})>0\end{aligned}$$

$\therefore\ \ 19^2>\{2(\sqrt{30}+\sqrt{15})\}^2$

共に正なので，$19>2(\sqrt{30}+\sqrt{15})$

$\therefore\ \ \left(\sqrt{50-2\sqrt{30}}\right)^2-\left(\sqrt{31+\sqrt{60}}\right)^2>0$

$\therefore\ \ \boldsymbol{\sqrt{50-2\sqrt{30}}>\sqrt{31+\sqrt{60}}}$

【5】(1) $2<\sqrt{6}<3$ より，$a=\sqrt{6}-2$

$$\frac{a-1}{a+1}=\frac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}-1}=\frac{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{6}}{5}}$$

(2) $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ だから，$2<\sqrt{8}<3$ より，$a=2,\ b=2\sqrt{2}-2$

$2ab+b^2=b(2a+b)=(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)=(2\sqrt{2})^2-2^2=\boldsymbol{4}$

(3) $1<\sqrt{3}<2$ より，$-2<-\sqrt{3}<-1$

よって，$2<4-\sqrt{3}<3$ だから，

$x=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$

$x-2=-\sqrt{3}$ より，$x^2-4x+4=3$

したがって，

$x^2-4x+7=(x^2-4x+4)+3=3+3=\boldsymbol{6}$

(4) $\sqrt{15+\sqrt{176}}=\sqrt{15+2\sqrt{44}}=\sqrt{11}+\sqrt{4}=\sqrt{11}+2$

$\sqrt{9}<\sqrt{11}<\sqrt{16}$ より，

$3+2<\sqrt{11}+2<4+2 \qquad \therefore\ 5<\sqrt{11}+2<6$

$\therefore\ a=5 \qquad b=\sqrt{11}+2-5=\sqrt{11}-3$

$$\therefore\ \frac{a}{b(b+6)}=\frac{5}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}-3+6)}=\frac{5}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}=\frac{5}{11-9}=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

(5)
$$\frac{18}{\sqrt{22+4\sqrt{10}}}=\frac{18}{\sqrt{22+2\sqrt{40}}}=\frac{18}{\sqrt{20}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{18(\sqrt{20}-\sqrt{2})}{20-2}=\sqrt{20}-\sqrt{2}$$

ここで，$(\sqrt{20}-\sqrt{2})^2$ を求めると，

$$\begin{array}{rcccl}
(\sqrt{20}-\sqrt{2})^2 & = & 22-2\sqrt{40} & = & 22-\sqrt{160} \\
\sqrt{144} & < & \sqrt{160} & < & \sqrt{169}\ \text{より} \\
-13 & < & -\sqrt{160} & < & -12 \\
\therefore\quad 22-13 & < & 22-\sqrt{160} & < & 22-12 \\
9 & < & 22-\sqrt{160} & < & 10 \\
\therefore\quad 3^2 & < & (\sqrt{20}-\sqrt{2})^2 & < & 10<4^2 \\
3 & < & \sqrt{20}-\sqrt{2} & < & 4
\end{array}$$

よって，$a=3$，$b=\sqrt{20}-\sqrt{2}-3$

以上より，

$$\begin{aligned}
2ab+b^2=(2a+b)b&=(6+\sqrt{20}-\sqrt{2}-3)\times(\sqrt{20}-\sqrt{2}-3)\\
&=(\sqrt{20}-\sqrt{2}+3)(\sqrt{20}-\sqrt{2}-3)\\
&=(\sqrt{20}-\sqrt{2})^2-9\\
&=22-2\sqrt{40}-9\\
&=\mathbf{13-4\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

【6】(1) $\sqrt{168n}=2\sqrt{42n}=2\sqrt{2\times3\times7\times n}$

これが自然数となる最小の自然数 n の値は，**42**

(2) $a+2<2a+1$ より，$a>1$

よって，$3<a+2\leqq\sqrt{x}\leqq2a+1$ であり，

$(a+2)^2\leqq x\leqq(2a+1)^2$

よって，$(2a+1)^2-(a+2)^2+1=46$ より，

$a^2=16$

$a>1$ より，$\boldsymbol{a=4}$

【7】n が自然数のとき，$n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$ だから，

$$n < \sqrt{n^2+1} < n+1$$

よって，$\sqrt{n^2+1}$ の整数部分は n である．

小数第 1 位が 2 となるのは，

$$n+0.2 \leqq \sqrt{n^2+1} < n+0.3$$

のときである．これより，

$$\begin{cases} n+0.2 \leqq \sqrt{n^2+1} & \cdots\cdots ① \\ \sqrt{n^2+1} < n+0.3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より，

$$(n+0.2)^2 \leqq n^2+1$$

$$0.4n+0.04 \leqq 1$$

$$n \leqq 2.4 \quad \cdots\cdots ①'$$

② より，

$$n^2+1 < (n+0.3)^2$$

$$1 < 0.6n+0.09$$

$$n > \frac{91}{60} > \frac{90}{60} = \frac{3}{2} = 1.5 \quad \cdots\cdots ②'$$

①$'$，②$'$ より，$1.5 < n \leqq 2.4$ をみたす自然数 n を求めて，**2**

２章　方程式の総合問題

問題

【1】(1)

$$\frac{4-2(x-1)}{3} \geqq 2x+1$$
$$4-2(x-1) \geqq 6x+3$$
$$4-2x+2 \geqq 6x+3$$
$$-8x \geqq -3$$
$$\boldsymbol{x \leqq \frac{3}{8}}$$

(2)

$$9-2x > -\sqrt{2}x+6$$
$$(\sqrt{2}-2)x > -3$$
$$x < \frac{-3}{\sqrt{2}-2} \qquad [\sqrt{2} < 2]$$
$$x < \frac{3}{2-\sqrt{2}} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{4-2}$$
$$\therefore \boldsymbol{x < \frac{6+3\sqrt{2}}{2}}$$

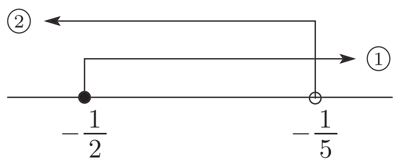
(3) $\begin{cases} 11-3(x+4) \leqq x+1 & \cdots ① \\ \dfrac{4-x}{3} - \dfrac{x+1}{2} > 1 & \cdots ② \end{cases}$

① より，

$$11-3x-12 \leqq x+1$$
$$-4x \leqq 2$$
$$x \geqq -\frac{1}{2}$$

② より，

$$2(4-x)-3(x+1) > 6$$
$$8-2x-3x-3 > 6$$
$$-5x > 1$$
$$x < -\frac{1}{5}$$



以上より，$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq x < -\frac{1}{5}}$

(4) $\begin{cases} 3+2x \leqq (3\sqrt{2}-1)x & \cdots ① \\ 3(2\sqrt{2}x-1) \leqq 7(\sqrt{2}x-1) & \cdots ② \end{cases}$

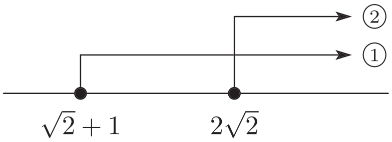
① より，

$$2x-(3\sqrt{2}-1)x \leqq -3$$
$$(-3\sqrt{2}+3)x \leqq -3$$
$$-3(\sqrt{2}-1)x \leqq -3$$
$$(\sqrt{2}-1)x \geqq 1$$
$$x \geqq \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

② より，

$$6\sqrt{2}x-3 \leqq 7\sqrt{2}x-7$$
$$-\sqrt{2}x \leqq -4$$
$$x \geqq \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$2\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}-1>0$ より，$\sqrt{2}+1<2\sqrt{2}$



よって，$\boldsymbol{x \geqq 2\sqrt{2}}$

(5)
$$9-3x=6x^2$$
$$-6x^2-3x+9=0$$
$$2x^2+x-3=0$$
$$(x-1)(2x+3)=0$$
$$\boldsymbol{x=1,\ -\frac{3}{2}}$$

(6)
$$x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$$
$$(x-\sqrt{2})(x-1)=0$$
$$\boldsymbol{x=\sqrt{2},\ 1}$$

(7)
$$3x^2-14x-18=0$$
$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+3\times18}}{3}$$
$$\boldsymbol{x=\frac{7\pm\sqrt{103}}{3}}$$

(8)
$$\begin{cases} x-y^2=2 & \cdots① \\ x+4y=5 & \cdots② \end{cases}$$

① より，$x=y^2+2$

これを ② に代入して，

$$y^2+2+4y=5$$
$$y^2+4y-3=0$$

$$\boldsymbol{y = -2 \pm \sqrt{7}}$$

よって，$\boldsymbol{x = 13 \mp 4\sqrt{7}}$（複号同順）

【2】 共通解を p とすると，

$p^2 + kp + 2 = 0 \ \cdots$①

$p^2 + 2p + k = 0 \ \cdots$②

が成り立つ．ここで，① − ② より

$p(k-2) + 2 - k = 0$

$(p-1)(k-2) = 0$

よって，$p = 1$ または $k = 2$

$p = 1$ のとき，もとの方程式は共に $k + 3 = 0$ となり，$k = -3$

$k = 2$ のとき，もとの方程式は共に $x^2 + 2x + 2 = 0$ となるが，$\dfrac{D}{4} = 1 - 2 < 0$ となって解なし．

以上より，$\boldsymbol{k = -3}$

【3】②より

$(2x-1)(x+1) = 0$

$x = \dfrac{1}{2},\ -1$

①に $x = \dfrac{1}{2}$ を代入．

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}(a^2+1) + \dfrac{5}{4}a = 0$

$2a^2 + 5a + 3 = 0$

$(a+1)(2a+3) = 0$

$a = -1,\ -\dfrac{3}{2}$

これらは条件をみたす．

①に $x = -1$ を代入．

$1 - (a^2+1) + \dfrac{5}{4}a = 0$

$-a^2 + \dfrac{5}{4}a = 0$

$a\left(-a + \dfrac{5}{4}\right) = 0$

$a = 0,\ \dfrac{5}{4}$

これらは条件をみたす．よって，

$\boldsymbol{a = -1,\ -\dfrac{3}{2},\ 0,\ \dfrac{5}{4}}$

【4】(1) 解と係数の関係より,

$$a+b=\frac{3}{2},\quad ab=-\frac{1}{2}$$

これを $2t^2-(a+b)t+ab=0$ に代入して

$$2t^2-\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}=0$$

$$4t^2-3t-1=0$$

$$(4t+1)(t-1)=0$$

$$\boldsymbol{t=-\frac{1}{4},\ 1}$$

(2) 解と係数の関係より,

$$a+b=1,\quad ab=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2-3ab}=\frac{1}{1+\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

(3) $x^2+bx+72=0$ の 2 つの解を,題意より a,$2a$ とおくと,解と係数の関係より,

$$\begin{cases} a+2a=3a=-b \ \cdots ① \\ a\times 2a=2a^2=72 \ \cdots ② \end{cases}$$

①で,$-b>0$ だから,$a>0$

②で,$a>0$ より,$a=6$

よって,$b=-3a=-18$ (これは条件をみたす) を代入して,

$$x^2+18x+1=0$$

$$\boldsymbol{x=-9\pm 4\sqrt{5}}$$

(4) $x^2+2x-5=0$ の 2 つの解を α,β とすると,解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\quad \alpha\beta=-5$$

題意より,

$$a=-\{(\alpha+1)+(\beta+1)\}=-(\alpha+\beta)-2=0$$

$$b=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-6$$

よって,$\boldsymbol{a=0,\ b=-6}$

【5】 $x^2-3ax+5a(a-6)=0$ $\cdots$①

$x=a-4$ を①に代入して

$$(a-4)^2-3a(a-4)+5a(a-6)=0$$
$$3a^2-26a+16=0$$
$$(3a-2)(a-8)=0$$
$$a=\frac{2}{3},\ 8$$

ここで，$a<4$ より，$a=\dfrac{2}{3}$ を①に代入して

$$x^2-2x-\frac{160}{9}=0$$
$$\left(x+\frac{10}{3}\right)\left(x-\frac{16}{3}\right)=0$$

$a-4=-\dfrac{10}{3}$ だから，もう 1 つの解は，$\boldsymbol{x=\dfrac{16}{3}}$

<別解>

$a=\dfrac{2}{3}$ より，1 つの解は $a-4=\dfrac{2}{3}-4=-\dfrac{10}{3}$

もう 1 つの解を β とおくと，解と係数の関係より

$$\beta+\left(-\frac{10}{3}\right)=3a=2$$
$$\therefore\quad \beta=2+\frac{10}{3}=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

【6】(1) 解と係数の関係より，

$3+p=5,\quad 3+q=8$

$\boldsymbol{p=2,\quad q=5}$

(2) 解と係数の関係より，

$a+4=5\qquad \therefore\quad a=1$

よって，$1+q=8$

つまり，$\boldsymbol{q=7}$

(3) $p:q=1:2$ より，$q=2p$

ここで，解と係数の関係より，

$a+p=5,\quad a+2p=8$

$p=3,\ a=2,\ q=6$

よって，$\boldsymbol{m=ap=6,\ n=aq=12}$

【7】(1) $x^2+2x-2=0$ を解いて，$x=-1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\quad a=-1-\sqrt{3}$ $\cdots$①

また，a は $x^2+2x-2=0$ の解であるから，$a^2+2a-2=0$ が成り立つ．よって，

$a^2=-2a+2$

したがって，

$$2a^2-3a+1=2(-2a+2)-3a+1$$
$$=-7a+5\ \cdots ②$$

②に①を代入して

$-7(-1-\sqrt{3})+5=\boldsymbol{12+7\sqrt{3}}$

(2) $x^2-x-3=0$ を解いて，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\therefore\quad a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\ \cdots①$

また，a は $x^2-x-3=0$ の解であるから，$a^2-a-3=0$ が成り立つ．よって，

$a^2=a+3$

したがって，

$$\begin{aligned} a^3-2a^2+a+1 &= a(a+3)-2a^2+a+1 \\ &= -a^2+4a+1 \\ &= -(a+3)+4a+1 \\ &= 3a-2\ \cdots② \end{aligned}$$

②に①を代入して

$$3\times\frac{1+\sqrt{13}}{2}-2=\boldsymbol{\frac{-1+3\sqrt{13}}{2}}$$

【8】$x^2+2x+3a=0\ \cdots$(i) と，

$x^2+2ax+a^2-a-1=0\ \cdots$(ii) の判別式が，ともに正か 0 ならばよいので，

(i) より

$$\frac{D}{4}=1-3a\geqq 0$$

$$a\leqq\frac{1}{3}$$

(ii) より

$$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-a-1)=a+1\geqq 0$$

$$a\geqq -1$$

よって，$-1\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$．題意をみたす整数 a は，$\boldsymbol{-1}$**，0**

【9】(1) 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-k\ \cdots①,\quad \alpha\beta=39\ \cdots②$

α，β はともに整数より，②から α，β の組み合わせは

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 39),\ (3,\ 13),\ (-1,\ -39),\ (-3,\ -13)$

およびその順序を逆にしたものである．よって①より

$k=-(\alpha+\beta)=\boldsymbol{\pm 40,\ \pm 16}$

(2) $5x^2-11x+n=0$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-20n}}{10}$$

これが整数解となるためには $D=121-20n$ が平方数となることが必要である．

$D>0$ より

$121-20n>0$

$$n<\frac{121}{20}$$

これと $n>0$ より，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について調べればよい．

このうち $121-20n$ が平方数になるのは，$n=2,\ 6$ のとき．

$n=2$ のとき

$5x^2-11x+2=0$

$(x-2)(5x-1)=0$

$$x=2,\ \frac{1}{5}$$

よって，このとき整数解をもつ．

$n=6$ のとき

$5x^2-11x+6=0$

$(x-1)(5x-6)=0$

$$x=1,\ \frac{6}{5}$$

よって，このとき整数解をもつ．

以上より，$\boldsymbol{n=2,\ 6}$

(3) 2つの解を α, β とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=4\ \cdots$①,　$\alpha\beta=\dfrac{1+a}{2}\ \cdots$②

一方，判別式より

$\dfrac{D}{4}=16-2(1+a)\geqq 0$　　$\therefore\ \ a\leqq 7\ \cdots$③

$a>0$ より，②から $\alpha\beta>0$

よって，α, β は同符号であり，さらに，①より和が正なので，共に正である．

①をみたす正の整数 α, β の組は,

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ のみ

よって，②より

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ のときは $3=\dfrac{1+a}{2}$　$\therefore\ \ a=5$

また

$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 2)$ のときは $4=\dfrac{1+a}{2}$　$\therefore\ \ a=7$

これらは③をみたしている．よって，$\boldsymbol{a=5,\ 7}$

＜別解＞

$$\dfrac{D}{4}=16-2(1+a)=14-2a\geqq 0$$

$$\therefore\ \ a\leqq 7$$

$0<a$ より，$0<a\leqq 7$ において，$\dfrac{D}{4}=14-2a$ が平方数になることが必要.

ここで0以上の整数 n を用いると，$14-2a=n^2$ とかけて

$x=\dfrac{4\pm n}{2}$

$a=\dfrac{14}{2}-\dfrac{n^2}{2}=7-\dfrac{n^2}{2}$

x が整数となるのは n が偶数のときであり

$n=0$ のとき，$a=7-0=7$

$n=2$ のとき，$a=7-\dfrac{4}{2}=7-2=5$

$n=4$ のとき，$a=7-\dfrac{16}{2}=-1$

a は正の整数であるから，$\boldsymbol{a=5,\ 7}$

(4) $x=\dfrac{(a+2)\pm\sqrt{(a+2)^2-12a}}{6}$ より,

$D=(a+2)^2-12a=a^2-8a+4$ が平方数であることが必要. よって, m を 0 以上の整数として, $a^2-8a+4=m^2$ となる $(a,\ m)$ の組があることが必要.

$$a^2-8a+4=m^2$$
$$(a^2-8a+16)-16+4=m^2$$
$$(a-4)^2-m^2=12$$
$$(a-4-m)(a-4+m)=12$$

$m\geqq 0$ より $a-4-m\leqq a-4+m$

$a-4-m,\ a-4+m$ はともに整数なので, 条件をみたす数は

$$(a-4-m,\ a-4+m)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (-12,\ -1),\ (-6,\ -2),\ (-4,\ -3)$$

の 6 組しかない. さらに, $(a-4+m)-(a-4-m)=2m$ より, 2 数の差は偶数となり, 条件をみたすものは

$$\begin{cases} a-4-m=2 \\ a-4+m=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-4-m=-6 \\ a-4+m=-2 \end{cases}$$

だけである. このとき, $(a,\ m)=(8,\ 2),\ (0,\ 2)$

もとの式は, $a=8$ のとき

$$3x^2-10x+8=0$$
$$(3x-4)(x-2)=0$$
$$x=\frac{4}{3},\ 2$$

また, $a=0$ のとき

$$3x^2-2x=0$$
$$x(3x-2)=0$$
$$x=0,\ \frac{2}{3}$$

よって, たしかに整数解をもつ. よって, $\boldsymbol{a=0,\ 8}$

【10】$x=1.25=\dfrac{5}{4}$ が解なので次式が成立する．

$$\frac{25}{16}-\frac{5}{4}b-c=0 \qquad \therefore \quad c=\frac{25}{16}-\frac{5}{4}b \ \cdots①$$

ここで c は小数第 1 位を四捨五入すると 3 なので

$2.5 \leqq c < 3.5$

をみたす．①を代入して

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2} \leqq & \quad \frac{25}{16}-\frac{5}{4}b \quad < \frac{7}{2}\\
\frac{40-25}{16} \leqq & \quad -\frac{5}{4}b \quad < \frac{56-25}{16}\\
\frac{15}{16} \leqq & \quad -\frac{5}{4}b \quad < \frac{31}{16}\\
-\frac{15}{16}\times\frac{4}{5} \geqq & \quad b \quad > -\frac{31}{16}\times\frac{4}{5}\\
-\frac{31}{20} < & \quad b \quad \leqq -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

ここで b は整数なので，$b=-1$ と定まる．よって，①より

$c=\dfrac{25}{16}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{25+20}{16}=\dfrac{45}{16}$

もう 1 つの解を β とすると，解と係数の関係より

$\dfrac{5}{4}+\beta=b=-1$

$\therefore \quad \beta=-\dfrac{9}{4}$

よって，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=\dfrac{45}{16}(=2.8125)}$，**もう 1 つの解は** $\boldsymbol{-\dfrac{9}{4}(=-2.25)}$

【11】(1) $(x-\sqrt{2})\{x-(\sqrt{2}-1)\}=0$

$$\boldsymbol{x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}-1}$$

(2) $x^2-(2+2\sqrt{3})x+\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)=0$

$$(x-\sqrt{3})\{x-(\sqrt{3}+2)\}=0$$

$$\boldsymbol{x=\sqrt{3},\ \sqrt{3}+2}$$

(3) ②より，$y=-2x+2 \ \cdots②'$

①，②' より

$3x^2-8x-3=-2x+2$

$3x^2-6x-5=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+15}}{3}=\boldsymbol{\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{3}}$$

$$y=-2(x-1)=-2\times\left(\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3}-1\right)$$

$$=\mp\boldsymbol{\frac{4\sqrt{6}}{3}} \quad \text{(複号同順)}$$

(4) ②より $y=3\sqrt{2}-x \quad \cdots ②'$

①, ②$'$ より

$$\sqrt{3}x^2-2\sqrt{6}x+\sqrt{2}=3\sqrt{2}-x$$
$$\sqrt{3}x^2+(-2\sqrt{6}+1)x-2\sqrt{2}=0$$
$$(x-2\sqrt{2})(\sqrt{3}x+1)=0$$
$$x=2\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$x=2\sqrt{2}$ のとき, $y=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, $y=3\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって,

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(2\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

<別解>

解の公式を用いると

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\sqrt{6}-1\pm\sqrt{(-2\sqrt{6}+1)^2+4\times\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{6}-1\pm\sqrt{25-4\sqrt{6}+8\sqrt{6}}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2\sqrt{6}-1)\pm\sqrt{25+4\sqrt{6}}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2\sqrt{6}-1)\pm(2\sqrt{6}+1)}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ここで, $\dfrac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$, $\dfrac{-2}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より

$$\boldsymbol{x=2\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

【12】(1) $\begin{cases} x+y+z=6 \ \cdots ① \\ 3x+2y+z=10 \ \cdots ② \\ x^2+y^2+z^2=14 \ \cdots ③ \end{cases}$

② − ① より

$2x+y=4 \qquad \therefore \quad y=-2x+4 \ \cdots ④$

② − ① × 2 より

$x-z=-2 \qquad \therefore \quad z=x+2 \ \cdots ⑤$

④，⑤を③に代入．[③は 2 次式で変形しにくいので，他を変形して代入]

$$\begin{aligned} x^2+(-2x+4)^2+(x+2)^2&=14 \\ x^2+4x^2-16x+16+x^2+4x+4&=14 \\ 6x^2-12x+6&=0 \\ x^2-2x+1&=0 \\ (x-1)^2&=0 \\ \therefore \quad x&=1 \end{aligned}$$

④より，$y=2$

⑤より，$z=3$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)}$

(2) $\begin{cases} x+y+z=0 \ \cdots ① \\ xy+yz+zx=-7 \ \cdots ② \\ x^2-xy+y^2=19 \ \cdots ③ \end{cases}$

ここで，③は x，y のみの式なので，①，②から z を消去することを考える．

①より $z=-(x+y) \ \cdots ④$

②より $xy+(x+y)z=-7$

④を代入して，

$$xy-(x+y)^2=-7 \ \cdots ⑤$$

$$x^2+xy+y^2=7 \ \cdots ⑥$$

⑥ − ③ より

$$\begin{aligned} 2xy&=-12 \\ xy&=-6 \ \cdots ⑦ \end{aligned}$$

⑤に代入して

$$\begin{aligned} -6-(x+y)^2&=-7 \\ (x+y)^2&=1 \\ x+y&=\pm 1 \end{aligned}$$

(i) $x+y=1$ のとき

①より，$z=-1$

$y=1-x$ を⑦に代入して

$$\begin{aligned} x(1-x)&=-6 \\ x^2-x-6&=0 \\ (x+2)(x-3)&=0 \\ x&=-2,\ 3 \end{aligned}$$

このとき，$y=3,\ -2$

(ii) $x+y=-1$ のとき

①より，$z=1$

$y=-x-1$ を⑦に代入して

$$x(-x-1)=-6$$
$$x^2+x-6=0$$
$$(x+3)(x-2)=0$$
$$x=2,\ -3$$

このとき，$y=-3,\ 2$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(-2,\ 3,\ -1),\ (3,\ -2,\ -1),\ (2,\ -3,\ 1),\ (-3,\ 2,\ 1)}$

【13】(1) $t=0$ のとき，$x^2-2ax+a+2=0$

これが重解をもつ条件は $D=0$ と表せるので，

$$\frac{D}{4}=a^2-(a+2)=0$$
$$a^2-a-2=0$$
$$(a+1)(a-2)=0$$
$$\boldsymbol{a=-1,\ 2}$$

(2) $t=3$ のとき，

$$x^2-2ax+a+2=3$$
$$x^2-2ax+a-1=0$$

(1) と同様にして $\dfrac{D}{4}=a^2-(a-1)=a^2-a+1=0$ が条件である．ところが，この a についての 2 次方程式の判別式を D' とすると，

$$D'=(-1)^2-4\times 1=1-4<0$$

よって，条件をみたす a は存在しない．つまり，**解なし**

(3) ①は $x^2-2ax+a+2-t=0$ となる．この方程式の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2-t)=0$$
$$a^2-a-2+t=0\ \cdots ②$$

が，①が重解をもつときの，a の値を求めるための方程式になる．よって，②の解が存在すればよい．②を a の 2 次方程式とみたときの判別式を D_2 とすると，

$$D_2=(-1)^2-4\times(-2+t)$$
$$=1+8-4t=9-4t$$

これが 0 以上であれば条件をみたす a は存在する．よって

$$D_2=9-4t\geqq 0$$
$$\boldsymbol{t\leqq \frac{9}{4}}$$

問題

【1】①と②を連立させる.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ①' \\ y = \dfrac{1}{4}x^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①′と②より

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$(x+2)(3x-2) = 0$$

$$x = -2,\ \frac{2}{3}$$

A の x 座標は負なので，$x = -2$ のときが点 A.

$\therefore\quad y = 1$　　　　　A$(-2,\ 1)$

この点を③が通るので，

$1 = \dfrac{a}{-2}$　　　　　$\therefore\quad a = -2$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{x} & \cdots\cdots ③' \\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ①' \end{cases}$$

を改めて連立すると

$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = -\frac{2}{x}$$

両辺を $-3x$ 倍して

$$x^2 - x = 6$$

$$\therefore\quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2,\ 3$$

A の x 座標が -2 より，もう 1 点の x 座標が 3.

$$\therefore\quad y = -\frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{(-2,\ 1),\ \left(3,\ -\frac{2}{3}\right)}$$

【2】(1) $\begin{cases} y = x^2 \ \cdots ① \\ y = x + 6 \ \cdots ② \end{cases}$

とすると，①，②より，

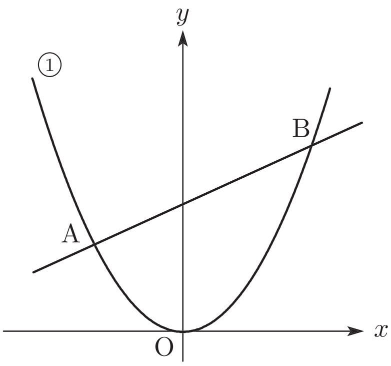
$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

図より, A の x 座標は負だから, $x = -2$

よって，**(−2，4)**



(2) P $(k,\ k^2)$ とおくと，AB // OP となるから，

(ABの傾き) = (OPの傾き)

$$1 = \frac{k^2 - 0}{k - 0}$$

$$k = 1$$

したがって，P **(1，1)**

(3) 点 Q $(t,\ t^2)$ を通り，AB に平行な直線

$y = x - t + t^2 \ \cdots ③$

と，AB の距離が最大になるとき，すなわち，①と③が接するとき，△ ABQ の面積は最大になる.

①，③から y を消去して整理すると，

$x^2 - x + t - t^2 = 0 \ \cdots ④$

④の判別式を D とすると，$D = 0$ となることが条件であるから，

$$D = 1 - 4(t - t^2) = 0$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(2t-1)^2 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

よって，Q $\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1}{4}}\right)$

【3】(1) 直線の方程式 $y = \frac{3}{2}x + 4$ に $x = -2$ を代入すると

$y = 1 \qquad \therefore\ \mathrm{A}(-2,\ 1)$

これを $y = ax^2$ が通るので，$\boldsymbol{a = \frac{1}{4}}$

(2) $y = \frac{1}{4}x^2$ と $y = \frac{3}{2}x + 4$ を連立して

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 4 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

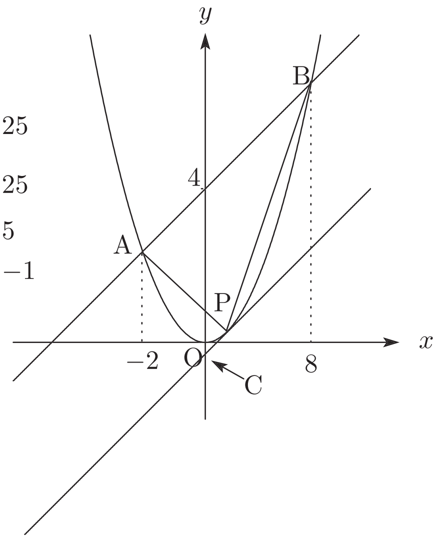
$$(x+2)(x-8) = 0$$

$$\therefore\ x = -2,\ 8$$

A の x 座標が -2 より，B の x 座標は 8.

$\therefore\ y = \frac{1}{4} \times 8^2 = 16 \qquad$ B**(8，16)**

(3) 直線 AB と平行な直線を $y=\dfrac{3}{2}x+c$ とおき，y 軸との切片を C(0, c) とする．



△ ACB=25 となるときの c を考えると，

$$\frac{1}{2}\times(4-c)\times(\text{A と B の } x \text{ 座標の差})=25$$

$$\frac{1}{2}\times(4-c)\times 10=25$$

$$4-c=5$$

$$c=-1$$

△ ACB= △ APB=25 であるとき，点 P は $y=\dfrac{3}{2}x-1$ 上にあるから，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ と連立すると，

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+1=0$$

$$\therefore x=3\pm\sqrt{5}$$

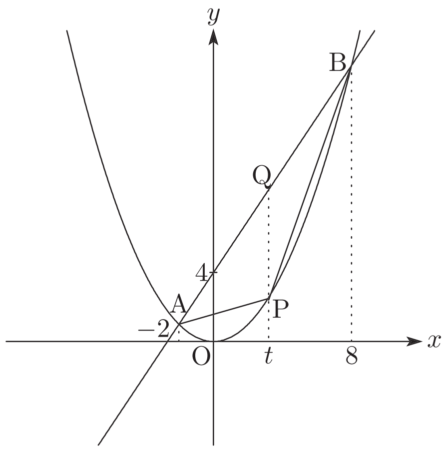
点 P の x 座標は $-2<x<8$ が条件であり，$t=3\pm\sqrt{5}$ は共にこれをみたす．

$$y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}\left(3\pm\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left(14\pm6\sqrt{5}\right)=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{P}\left(\boldsymbol{3\pm\sqrt{5},\ \frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}}\right)\quad(\text{複号同順})$$

＜別解＞

P の x 座標を t とし，x 座標が t である直線 AB 上の点を Q とする．



$$\text{P}\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right),\quad \text{Q}\left(t,\ \frac{3}{2}t+4\right)$$

となるので

$$\text{PQ}=\frac{3}{2}t+4-\frac{1}{4}t^2$$

$$=-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t+4$$

△ APB

$$=\frac{1}{2}\times\text{PQ}\times(\text{A と B の } x \text{ 座標の差})$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t+4\right)\times10=25$$

が条件．

$$\therefore\quad -\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t+4=5$$

$$t^2-6t+4=0$$

$$t=3\pm\sqrt{9-4}=3\pm\sqrt{5}$$

$-2<t<8$ が条件であり，$t=3\pm\sqrt{5}$ は共にこれをみたす．

$$y=\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}\left(3\pm\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left(14\pm6\sqrt{5}\right)=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{P}\left(\boldsymbol{3\pm\sqrt{5},\ \frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}}\right)\quad(\text{複号同順})$$

【4】(1) $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ y = 2x \end{cases}$

を連立して，

$\dfrac{6}{x} = 2x \qquad \therefore \quad x^2 = 3 \qquad \therefore \quad x = \pm\sqrt{3}$

$x > 0$ より，$x = \sqrt{3}$

$y = 2x = 2\sqrt{3}$

よって，**A ($\boldsymbol{\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$)**

(2) (i)BP//OA となるとき，(ii)O について B と対称な点を B′ とすると B′P//OA となるときがある．

(i) BP // OA となるので，B を通る傾き 2 の直線が，双曲線と交わる点の座標を求めればよい．

$y = 2x + b$ とおくと，B $\left(\dfrac{11}{2},\ 0\right)$ を通るので，

$0 = 2 \times \dfrac{11}{2} + b \qquad \therefore \quad b = -11$

$y = 2x - 11$ と $y = \dfrac{6}{x}$ を連立して

$$2x - 11 = \frac{6}{x}$$

$$2x^2 - 11x - 6 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 6) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2},\ 6$$

$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$y = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 11 = -12$

$x = 6$ のとき，$y = 2 \times 6 - 11 = 1$

よって，$\left(-\dfrac{1}{2},\ -12\right)$，$(6,\ 1)$

(ii) OB=OB′ として，B′ を x 軸の負の部分にとれば

$\triangle\,\mathrm{OAB} = \triangle\,\mathrm{OAB'}$

となるので，△ OAB′ と面積が等しい△ OAP も条件をみたす．

$y = 2x + b$ とおくと，B′$\left(-\dfrac{11}{2},\ 0\right)$ を通るので，$b = 11$

$y = 2x + 11$ と $y = \dfrac{6}{x}$ を連立して，

$$2x + 11 = \frac{6}{x}$$

$$2x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 6) = 0$$

$$x = \frac{1}{2},\ -6$$

$x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$y = 12$

$x = -6$ のとき，$y = -1$

よって，$\left(\dfrac{1}{2},\ 12\right)$，$(-6,\ -1)$

以上より，

$$\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{-12}\right),\ \mathbf{(6,\ 1)},\ \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{12}\right),\ \mathbf{(-6,\ -1)}$$

【5】x_1，x_2 は次の連立方程式の解

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$$

よって，$x^2 - ax - b = 0$

解と係数の関係より

$x_1 + x_2 = a\ \cdots$①

$x_1x_2 = -b\ \cdots$②

ここで，条件式および $y_1 = {x_1}^2$，$y_2 = {x_2}^2$ より

$$\begin{cases} {x_1}^2 - {x_2}^2 = x_1 - x_2\ \cdots ③ \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 = 7\ \cdots ④ \end{cases}$$

③より，

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$

$x_1 - x_2 \fallingdotseq 0$ より，$x_1 + x_2 = 1$

これと①より，$a = 1$

④より，

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7$$
$$1^2 - 2x_1x_2 = 7$$
$$\therefore\quad x_1x_2 = -3$$

②より，$b = 3$

よって，直線は $\boldsymbol{y = x + 3}$

【6】(1) 点 A, B の x 座標は次の連立方程式の 2 つの解である．

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$$

よって，

$$\frac{1}{2}x^2 - ax - b = 0$$

$\therefore\quad x^2 - 2ax - 2b = 0$

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2a\ \cdots ① \\ \alpha\beta = -2b\ \cdots ② \end{cases}$$

接線の方程式を $y = ax + k$ とおくと，

$$\frac{1}{2}x^2 = ax + k$$

$x^2 - 2ax - 2k = 0\ \cdots$③

が重解をもつ．つまり

$$\frac{D}{4} = a^2 + 2k = 0 \qquad \therefore\quad k = -\frac{a^2}{2}\ \cdots ④$$

③に代入して

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$
$$(x-a)^2 = 0$$
$$x = a$$

よって，①より，

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2}{8}$$

したがって，$\mathbf{P}\ \left(\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{2}},\ \boldsymbol{\frac{(\alpha+\beta)^2}{8}}\right)$

(2) 接線の y 切片を Q とおくと，PQ // AB より $\triangle$ ABP = $\triangle$ ABQ

$\triangle$ ABQ$=\dfrac{1}{2}(b-k)(\beta-\alpha)$ なので

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABP} &= \triangle \mathrm{ABQ} \\ &= \frac{1}{2}\left(b+\frac{a^2}{2}\right)\times(\beta-\alpha) \quad [④より] \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\alpha\beta}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right\}(\beta-\alpha) \quad [①,②より] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{-4\alpha\beta+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}\right)(\beta-\alpha) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4}\times(\beta-\alpha) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{16}(\beta-\alpha)^3}\end{aligned}$$

【7】(1) 傾きが 1 で，点 A を通るから，

$$y - 4 = 1\times(x+2)$$

整理して，$\boldsymbol{y = x + 6}$

(2) 点 P は $y = x^2$ 上の点だから，

P $(t,\ t^2)$

よって，

$$\frac{t^2-4}{t-(-2)} = \frac{(t+2)(t-2)}{t+2} = \boldsymbol{t-2}$$

(3) AB の傾きは 1，AP の傾きは $t-2$ で，AB $\perp$ AP より，

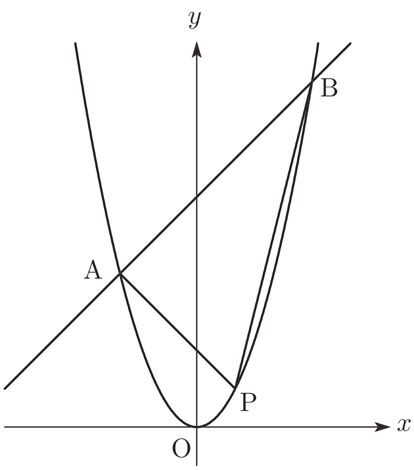
$$1\times(t-2) = -1$$
$$t = 1$$

$t=1$ より，P $\mathbf{(1,\ 1)}$

(4) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}$

よって,

$$x^2 = x + 6$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$
$$x = 3,\ -2$$



直線 PB の傾きは,

$$\frac{t^2 - 9}{t - 3} = t + 3$$

$\angle\mathrm{ABP} = 90^\circ$ のとき, $\mathrm{AB} \perp \mathrm{PB}$ より,

$$1 \times (t+3) = -1$$
$$t = -4$$

$\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ のとき, $\mathrm{AP} \perp \mathrm{PB}$ より,

$$(t-2)(t+3) = -1$$
$$t^2 + t - 5 = 0$$
$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

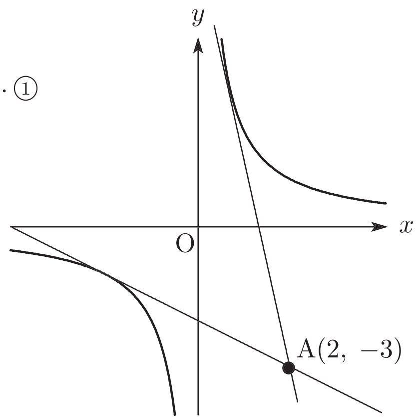
以上より, 点 P の x 座標は

$$\boldsymbol{\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2},\ -4}$$

【8】求める接線の方程式を $y = ax + b$ とおくと

$(2,\ -3)$ を通るので,

$$-3 = 2a + b \qquad \therefore\ \ b = -2a - 3 \ \cdots\cdots ①$$



$y = \dfrac{2}{x}$ と $y = ax + b$ を連立して

$$ax + b = \frac{2}{x}$$
$$ax^2 + bx = 2 \quad (x \fallingdotseq 0)$$
$$ax^2 + bx - 2 = 0 \ \cdots\cdots ②$$

この方程式が重解をもてばよい.

$$D = b^2 - 4 \times a \times (-2) = 0$$
$$\therefore\ \ b^2 + 8a = 0 \ \cdots\cdots ③$$

① を代入して

$$(-2a-3)^2 + 8a = 0$$
$$4a^2 + 20a + 9 = 0$$
$$(2a+9)(2a+1) = 0$$
$$a = -\frac{9}{2},\ -\frac{1}{2}$$

(i) $a=-\dfrac{9}{2}$ のとき

① より，$b=9-3=6$

接線の式は

$\therefore\quad y=-\dfrac{9}{2}x+6$

このとき ② より，接点の x 座標は

$$
\begin{aligned}
-\frac{9}{2}x^2+6x-2&=0\\
9x^2-12x+4&=0\\
(3x-2)^2&=0\\
\therefore\quad x&=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$y=\dfrac{2}{x}=3\qquad\therefore$ 接点は $\left(\dfrac{2}{3},\ 3\right)$

(ii) $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき

① より，$b=-2$

接線の式は

$\therefore\quad y=-\dfrac{1}{2}x-2$

② より

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x^2-2x-2&=0\\
x^2+4x+4&=0\\
(x+2)^2&=0\\
\therefore\quad x&=-2
\end{aligned}
$$

$y=\dfrac{2}{x}=-1\qquad\therefore$ 接点は $(-2,\ -1)$

$$
\begin{cases}
\textbf{接線}\quad \boldsymbol{y=-\dfrac{9}{2}x+6}\qquad \textbf{接点}\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{2}{3},\ 3\right)}\\
\textbf{接線}\quad \boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x-2}\qquad \textbf{接点}\quad \boldsymbol{(-2,\ -1)}
\end{cases}
$$

【9】 $\begin{cases} y=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+1\ \cdots ① \\ y=-\dfrac{1}{2}x^2\ \cdots ② \end{cases}$

(1) ①，②から，y を消去して得られる，x の 2 次方程式

$x^2+2ax+a+2=0\ \cdots ③$

が，重解をもつことが条件であるから，③の判別式を D とおくと，

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4}=a^2-(a+2)&=0\\
a^2-a-2&=0\\
(a-2)(a+1)&=0\\
a&=2,\ -1
\end{aligned}
$$

$a=2$ のとき，③は，

$x^2+4x+4=0$

$$(x+2)^2=0$$
$$\therefore\quad x=-2$$

よって，共有点は $(-2,\ -2)$

$a=-1$ のとき，③は，

$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$\therefore\quad x=1$$

よって，共有点は $\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

したがって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=2} \textbf{ のとき，} \boldsymbol{(-2,\ -2)} \\ \boldsymbol{a=-1} \textbf{ のとき，} \boldsymbol{\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

(2) ③が整数解を持つように a の値を定めればよい．

③の 2 つの解を，$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とおくと，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2a\ \cdots④ \\ \alpha\beta=a+2\ \cdots⑤ \end{cases}$$

④，⑤より，a を消去して整理すると

$$2\alpha\beta+\alpha+\beta=4$$

ここで，左辺を $\alpha,\ \beta$ についての 1 次式の積の形に変形することを考える．

$$\alpha\beta+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta=2$$

両辺に $\dfrac{1}{4}$ を加えれば

$$\alpha\beta+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$
$$\therefore\ \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

と変形できる．両辺に 4 をかけて，

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)=9$$

$2\alpha+1>2\beta+1$ だから，

$$(2\alpha+1,\ 2\beta+1)=(9,\ 1),\ (-1,\ -9)$$
$$\therefore\quad \alpha=4,\ \beta=0 \text{ または } \alpha=-1,\ \beta=-5$$

④（または⑤）に代入して a を求めると，$a=-2$ または $a=3$

また，2 交点の x 座標は $\alpha,\ \beta$ であるから，その座標は

$$(0,\ 0),\ (4,\ -8) \text{ または } \left(-1,\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-5,\ -\frac{25}{2}\right)$$

後者は y 座標が整数でないので，条件をみたさない．

以上より，

$\boldsymbol{a=-2}$

2 交点の座標は $\boldsymbol{(0,\ 0),\ (4,\ -8)}$

【10】(1)　(i) $0 \leqq t \leqq 4$ のとき

RQ と AD の交点を E とすると，重なる部分は直角三角形 AQE で，

$$\mathrm{AQ} = t,\ \mathrm{AE} = \frac{t}{2}$$

だから，

$$S = t \times \frac{t}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S = \frac{1}{4}t^2\ \cdots ①$$

(ii) $4 \leqq t \leqq 6$ のとき

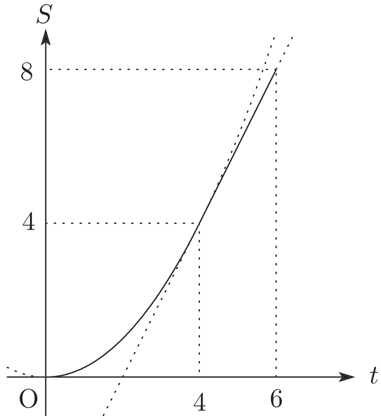
RQ と AD，BC の交点をそれぞれ F，G とすると，重なる部分は台形 ABGF で，

$$\mathrm{AF} = \frac{t}{2},\ \mathrm{BG} = \frac{t-4}{2},\ \mathrm{AB} = 4$$

だから，

$$S = \left(\frac{t}{2} + \frac{t-4}{2}\right) \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S = 2t - 4\ \cdots ②$$



(i)，(ii) をまとめて，

$$S = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{4}t^2\ (0 \leqq t \leqq 4)} \\ \boldsymbol{2t - 4\ (4 \leqq t \leqq 6)} \end{cases}$$

(2) $6 \leqq t \leqq 10$ のとき

RQ と BC の交点を H とすると，重なる部分は台形 PBHR で，

$$\mathrm{PR} = 3,\ \mathrm{BH} = \frac{t-4}{2},\ \mathrm{PB} = 10 - t$$

だから，

$$S = \left(3 + \frac{t-4}{2}\right) \times (10 - t) \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \ S = \frac{(t+2)(10-t)}{4}\ \cdots ③$$

①，②，③に $S = 5$ を代入すると，

① $\frac{1}{4}t^2 = 5$

$\therefore\ \ t = \pm 2\sqrt{5}$

$0 \leqq t \leqq 4$ より，どちらも不適.

② $2t - 4 = 5$

$\therefore\ \ t = \frac{9}{2}$

$4 \leqq t \leqq 6$ より，適する.

③ $\frac{(t+2)(10-t)}{4} = 5$

$$(t+2)(10-t) = 20$$

$$-t^2 + 8t = 0$$

$$t(t-8) = 0$$

$$t=0,\ 8$$

$6 \leqq t \leqq 10$ より，$t=8$ のとき適する．

以上より，

$\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$ **秒後と 8 秒後**

【11】(1) A における接線の式を $y=px+q$ とおくと，$(\alpha,\ \alpha^2)$ を通るので，

$\alpha^2 = p\alpha + q \qquad \therefore\ \ q=\alpha^2-p\alpha\ \cdots$①

$y=x^2$ と連立した式が重解をもつので，

$$x^2 = px+q$$
$$x^2-px-q=0$$
$$D=p^2+4q=0$$

①より

$$p^2+4(\alpha^2-p\alpha)=0$$
$$p^2-4p\alpha+4\alpha^2=0$$
$$(p-2\alpha)^2=0$$
$$p=2\alpha$$

①より，$q=\alpha^2-2\alpha\times\alpha=-\alpha^2$

求める式は，$\boldsymbol{y=2\alpha x-\alpha^2}\ \cdots$②

(2) m の式は (1) と同様にして，$y=2\beta x-\beta^2\ \cdots$③

②，③を連立して

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$$
$$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

ここで，$\alpha \fallingdotseq \beta$ なので，$\alpha-\beta \fallingdotseq 0$ である．よって，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

②に代入して，$y=2\alpha\times\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2=\alpha\beta$

よって，$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta}\right)$

(3) α, β は $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点の x 座標なので,
$x^2-ax-b=0$ の 2 解となる．解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=a \ \cdots ④ \\ \alpha\beta=-b \ \cdots ⑤ \end{cases}$$

ここで，ℓ と m が直交するとき，それらの傾きの積が -1 より

$$2\alpha\times2\beta=-1 \qquad \therefore \quad \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

の関係があることになる．このとき⑤から

$$b=-\alpha\beta=\frac{1}{4}$$

よって，$y=ax+b$ は必ず，$\left(\mathbf{0},\ \mathbf{\dfrac{1}{4}}\right)$ を通る．

また，このとき，P は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$ となる．

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{2}$ から，a の値が変わると P の x 座標は自由に変わることができるので，**P は直線 $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}}$ 上にある**

【12】(1) $y=ax+b$ とおくと，$(x_1,\ {x_1}^2)$ を通るので,

$${x_1}^2=ax_1+b \qquad \therefore \quad b={x_1}^2-ax_1$$

$y=x^2$ と $y=ax+b$ を連立した式の判別式が 0 なので

$$x^2-ax-b=0$$

$$D=a^2+4b=0$$

$$\therefore \quad a^2+4({x_1}^2-ax_1)=0$$

$$a^2-4ax_1+4{x_1}^2=0$$

$$(a-2x_1)^2=0$$

$$a=2x_1$$

$$b={x_1}^2-2{x_1}^2=-{x_1}^2$$

以上より，$\boldsymbol{y=2x_1x-x_1^2}$

(2) (1) において，$y=2$ とおくと,

$$2x_1x-{x_1}^2=2$$

$$2x_1x={x_1}^2+2$$

$$x=\frac{{x_1}^2+2}{2x_1}=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)$$

これが x_2 なので，$\boldsymbol{x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1+\dfrac{2}{x_1}\right)}$

(3) 図より，点 A_1, A_2, $\cdots$ は $y=2$ と $y=x^2$ の交点に近づくと考えられる．

$2=x^2$ より，$x=\pm\sqrt{2}$

$x>0$ より，$x=\sqrt{2}$ となり，A $(\sqrt{2},\ 2)$

よって，x_1, x_2, $\cdots$ は $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ に近づく．

$x_1=2$ のとき

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)=\frac{1}{2}(2+1)=\mathbf{\frac{3}{2}}=\mathbf{1.5}$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{2}{x_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\mathbf{\frac{17}{12}}=\mathbf{1.4166\cdots}$$

$$x_4=\frac{1}{2}\left(x_3+\frac{2}{x_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right)=\mathbf{\frac{577}{408}}=\mathbf{1.414215\cdots}$$

＜注＞ 以上のように，x_4 ですでに $\sqrt{2}=1.41421356\cdots\cdots$ の小数点以下第 5 位まで近似ができた．

このような近似法をニュートン法という．

4章　円とその性質

問題

【1】(1) $\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$ に対する円周角より，$\boldsymbol{x = 28^\circ}$

$\triangle$ ABF において，$\angle \mathrm{FAB} = 180^\circ - 88^\circ - x = 64^\circ$

四角形 ABCD は円に内接するので，$y = 180^\circ - 64^\circ = \mathbf{116^\circ}$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{BC}} : \overset{\frown}{\mathrm{CD}} : \overset{\frown}{\mathrm{DA}} = 2 : 3 : 3$ より，$\angle \mathrm{BAC} = 2a$，$\angle \mathrm{CAD} = 3a$，$\angle \mathrm{DBA} = 3a$ とおくことができる．

$\triangle$ ABE において，外角定理より，$\angle \mathrm{BAC} + \angle \mathrm{DBA} = \angle \mathrm{BEC}$

よって，$2a + 3a = 85^\circ$

これより，$a = 17^\circ$

したがって，$x = 5a = \mathbf{85^\circ}$

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角より，$y = \angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{ADB}$

一方，$\triangle$ ABD の内角の和より

$\angle \mathrm{ADB} = 180^\circ - x - \angle \mathrm{DBA} = 180^\circ - 85^\circ - 3 \times 17^\circ = 44^\circ$

よって，$\boldsymbol{y = 44^\circ}$

(3) 四角形 ABCD は円に内接するので，$x + y = 180^\circ \cdots ①$

$\triangle$ EBC において，外角定理より，$\angle \mathrm{ECF} = \angle \mathrm{EBC} + \angle \mathrm{CEB} = x + 28^\circ$

$\triangle$ DCF において，外角定理より，$y = \angle \mathrm{DCF} + \angle \mathrm{CFD} = x + 28^\circ + 32^\circ = x + 60^\circ$

これを①に代入すると $x + x + 60^\circ = 180^\circ$

これより，$\boldsymbol{x = 60^\circ}$

よって，$\boldsymbol{y = 120^\circ}$

(4) 接弦定理より，$\angle \mathrm{ACT} = \angle \mathrm{ATF} = 27^\circ$

また，$\overset{\frown}{\mathrm{TA}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ より，$\angle \mathrm{ACB} = 27^\circ$

一方，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}} : \overset{\frown}{\mathrm{CT}} = 3 : 4$ より，$\angle \mathrm{BTC} = 3a$，$\angle \mathrm{TBC} = 4a$ とおくことができる．

$\triangle$ TBC において，$27^\circ \times 2 + 4a + 3a = 180^\circ$ より，$a = 18^\circ$

よって，$\angle \mathrm{TBC} = 4a = 72^\circ$

接弦定理より，$x = \angle \mathrm{TBC} = \mathbf{72^\circ}$

また，$\triangle$ TDC において，外角定理より，$y = \angle \mathrm{DCT} + \angle \mathrm{CTD} = 27^\circ + 18^\circ \times 3 = \mathbf{81^\circ}$

(5) $\mathrm{DS} = \mathrm{DT}$ より，$\angle \mathrm{DST} = (180^\circ - 48^\circ) \div 2 = 66^\circ$

接弦定理より $x = \angle \mathrm{DST} = \mathbf{66^\circ}$

$\overset{\frown}{\mathrm{SA}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{BT}}$ より，$\angle \mathrm{ATB} = (180^\circ - x) \div 3 = 38^\circ$

また，$\triangle$ CBT において，外角定理より，$y = \angle \mathrm{SBT} + \angle \mathrm{ATB} = 66^\circ + 38^\circ = \mathbf{104^\circ}$

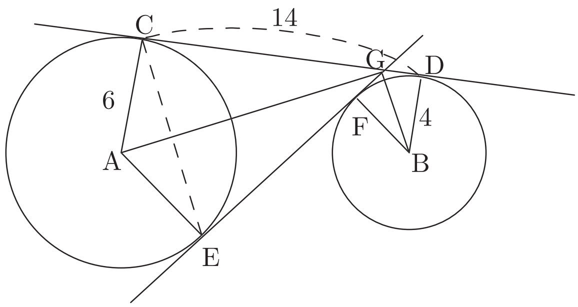
【2】A と C を結ぶ.

AB$//$DC より，$\angle$BAC$=$$\angle$DCA (錯角)

円周角の大きさが等しければ，それに対する弧の長さは等しいので，

$\overset{\frown}{\mathrm{AD}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$　（証明終）

【3】(1) 円外の 1 点から引いた 2 本の接線の長さは等しいので GC $=$ GE. また，円の半径は等しいので CA $=$ EA，接点において半径と接線は直交するので，



$\angle$GCA $=$ $\angle$GEA $= 90°$. 以上より 2 辺夾角相等により△GCA $\equiv$ △ GEA.

$\therefore \angle$AGC $=$ $\angle$AGE$\cdots$①.

同様にして，$\angle$BGD $=$ $\angle$BGF$\cdots$②.

一方，$\angle\mathrm{AGC} + \angle\mathrm{AGE} + \angle\mathrm{BGF} + \angle\mathrm{BGD} = 180°$.

これと①，②より，$2(\angle\mathrm{AGE} + \angle\mathrm{BGF}) = 180°$.

よって，$\angle\mathrm{AGB} = 90°$

したがって，$\angle\mathrm{CGA} = 90° - \angle\mathrm{BGD} = \angle\mathrm{DBG}$

これと，$\angle\mathrm{ACG} = \angle\mathrm{GDB} = 90°$ より，2 角相等なので，

△ ACG∽ △ GDB　（証明終）

(2) CG $= x$，GD $= y$ とおくと，仮定より $x + y = 14\cdots$①

一方，△ ACG∽ △ GDB より，AC : GD $=$ CG : DB

よって，$6 : y = x : 4$

$\therefore xy = 24$

①より，$y = 14 - x$. これを代入して，

$$x(14 - x) = 24$$
$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x - 2)(x - 12) = 0$$
$$x = 2,\ 12$$

このとき，$y = 12,\ 2$

CG $>$ GD より，$x > y$ なので，$(x,\ y) = (12,\ 2)$

円外の 1 点から引いた 2 本の接線の長さは等しいので，GE $=$ GC $= x$，GF $=$ GD $= y$

よって，EF $=$ GE $-$ GF $= x - y = 12 - 2 = \mathbf{10}$

【4】△ BCD と△ BFE において，

円 O において，∠BAC=∠BAF より，

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$

よって，BC=BF ⋯⋯①

円 O′ において，∠BAE=∠BAD より，

$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BD}$

よって，BE=BD ⋯⋯②

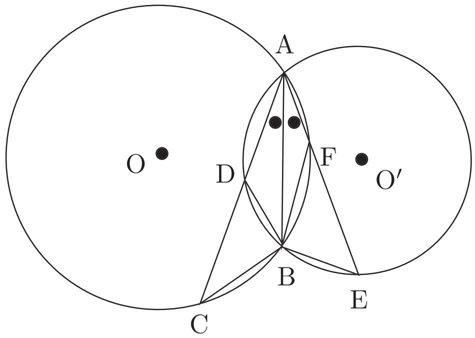
四角形 ACBF は円 O に内接するから，
　∠BCD = ∠BFE ⋯⋯③

四角形 ADBE は円 O′ に内接するから，
　∠BEF = ∠BDC ⋯⋯④

③，④ より，
　∠CBD = 180° − (∠BCD + ∠BDC)
　　　　= 180° − (∠BFE + ∠BEF)
　　　　= ∠FBE

つまり，∠CBD=∠FBE ⋯⋯⑤

①，②，⑤ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
　△ BCD ≡ △ BFE　（証明終）



【5】共通弦 AB を引く．

四角形 ABFD は円 O′ に内接しているから，
　∠DFB = ∠CAB ⋯①

弧 CB に対する円周角より，∠CAB = ∠CEB ⋯②

①，②より，∠DFB = ∠CEB ⋯③

また，∠DFE = ∠DFB − ∠EFB ⋯④

△ EBF の内角と外角の関係より，
　∠EBF = ∠CEB − ∠EFB ⋯⑤

③，④，⑤より，∠DFE = ∠EBF

よって，∠DFE = ∠DBF　（証明終）

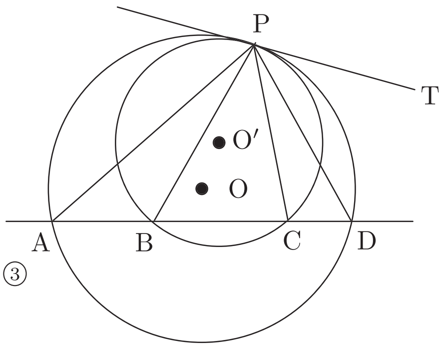
【6】共通外接線 PT を引く．

円 O において，接弦定理より，
　∠TPD = ∠PAD ⋯①

円 O′ において，接弦定理より，
　∠TPC = ∠PBC ⋯②

また，
　∠APB
　= ∠PBC − ∠PAD　(△ APB の外角) ⋯③
　∠CPD = ∠TPC − ∠TPD ⋯④

よって，①，②，③ より，
　∠APB = ∠TPC − ∠TPD
　　　　= ∠CPD　(④より)　（証明終）



【7】点 P における円 O_1，O_2 の共通接線 QR を引く．接弦定理より

$\angle\mathrm{PAE} = \angle\mathrm{ABP}$

同様に接弦定理より

$\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{APR}$

対頂角は等しいので

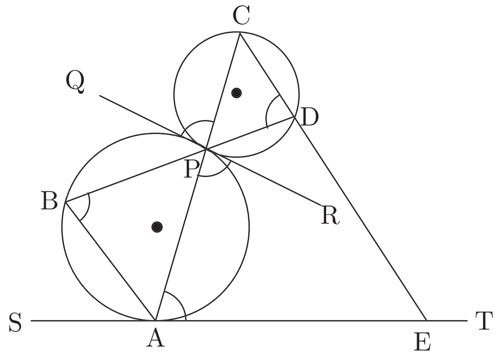
$\angle\mathrm{APR} = \angle\mathrm{CPQ}$

接弦定理より

$\angle\mathrm{CPQ} = \angle\mathrm{PDC}$

以上より

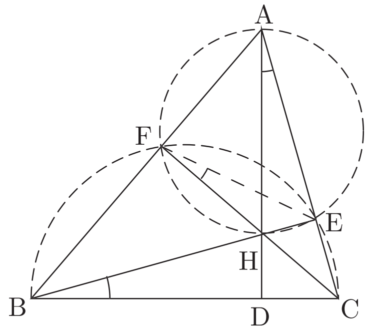
$\angle\mathrm{PAE} = \angle\mathrm{PDC}$



よって，四角形 APDE の外角と内対角とが等しいので，四角形 APDE は円に内接する．したがって，4 点 A，P，D，E は同一円周上にある．（証明終）

【8】(1) $\angle\mathrm{AEH}+\angle\mathrm{AFH} = 90^\circ+90^\circ = 180^\circ$ より，4 点 A，F，H，E は同一円周上にある．よって，$\overset{\frown}{\mathrm{HE}}$ に対する円周角より，$\angle\mathrm{EAH} = \angle\mathrm{EFH}$

（証明終）



(2) $\angle\mathrm{BEC} = \angle\mathrm{BFC} = 90^\circ$ より，4 点 B，F，E，C は同一円周上にある．よって，$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$ に対する円周角より，$\angle\mathrm{CBE} = \angle\mathrm{CFE}$

これと，(1) の結果より，$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{CBE}$.

よって，△ ADC，△ BEC の内角の和を考えることにより

$\angle\mathrm{ADC} = 180^\circ - \angle\mathrm{CAD} - \angle\mathrm{C} = 180^\circ - \angle\mathrm{CBE} - \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{BEC} = 90^\circ$

ゆえに，$\mathrm{AD}\perp\mathrm{BC}$　（証明終）

【9】(1) △ ABE∽ △ DCE より，AE : DE = EB : EC

$\therefore x : (x+2) = (x+2) : (x+6)$

$x(x+6) = (x+2)^2$

$x^2 + 6x = x^2 + 4x + 4$

$\boldsymbol{x = 2}$

(2) △ ABE∽ △ CDE より，BE : DE = EA : EC

$\therefore (x+7) : x = (x+8) : 4$

$x(x+8) = 4(x+7)$

$x^2 + 4x - 28 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4+28} = -2 \pm 4\sqrt{2}$

$x > 0$ より，$\boldsymbol{x = 4\sqrt{2} - 2}$

(3) AD // CE より，BA : AC = BD : DT = 5 : 3

よって，BA = $5a$，AC = $3a$ とおくことができる．

一方，△ BTC∽ △ TAC より，BC : TC = CT : CA

$\therefore 8a : \mathrm{CT} = \mathrm{CT} : 3a$

$\mathrm{CT}^2 = 24a^2$

$\mathrm{CT} = 2\sqrt{6}a \ (\because \ \ \mathrm{CT} > 0)$

また，△ BTC∽ △ TAC より，BT : TA = BC : TC

$\therefore 8 : x = 8a : 2\sqrt{6}a$

$\boldsymbol{x = 2\sqrt{6}}$

【10】(1) △ AED において，外角の定理より

$\angle\mathrm{CDF} = b + c$

△ CDF において，外角の定理より

$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{CDF} + a$

円に内接する四角形の性質より

$\angle\mathrm{BCD} + c = 180^\circ$

以上より，$(b+c) + a + c = 180^\circ$

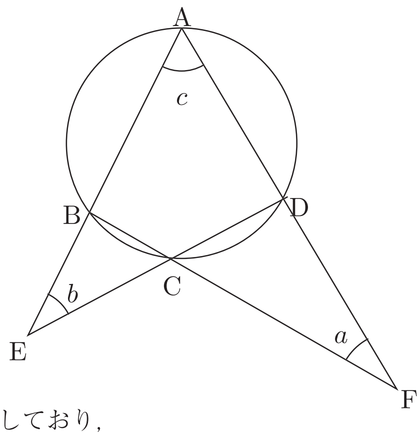
よって，$\boldsymbol{a = 180^\circ - b - 2c}$

$a = b$ となるときは，

$a = 180^\circ - a - 2c$ となるので，$a = 90^\circ - c$

これは△ ABF が直角三角形となることを意味しており，

AB⊥BC，CD⊥AD のとき である．



(2) △ EBC∽ △ EDA より，EB : ED = BC : DA = CE : AE

$\therefore 4 : (5 + \mathrm{CD}) = 2 : \mathrm{DA} = 5 : 10$

これより，CD = 3，DA = 4

次に，CF = x，FD = y とおく．

△ FCD∽ △ FAB より，FC : FA = CD : AB = DF : BF

$\therefore x : (y+4) = 3 : 6 = y : (x+2)$

これより，$y + 4 = 2x$，$2y = x + 2$．これを解いて，$x = \dfrac{10}{3}$，$y = \dfrac{8}{3}$

よって，$\boldsymbol{\mathrm{CF} = \dfrac{10}{3}}$，$\boldsymbol{\mathrm{FD} = \dfrac{8}{3}}$

【11】(1) $y = \dfrac{2-4}{2-(-4)}(x-2)+2$ より,

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}}$$

(2) 円 P, Q と x 軸との接点を $\mathrm{A'}$, $\mathrm{C'}$ とする. 円の接線の性質より,

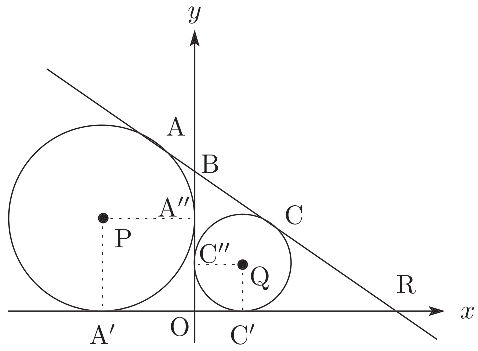
$\mathrm{AR} = \mathrm{A'R}$
$\mathrm{CR} = \mathrm{C'R}$

よって, $\mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}$

また, $\mathrm{A'}(-4,\ 0)$, $\mathrm{C'}(2,\ 0)$ より,

$\mathrm{A'C'} = 6$

よって, $\mathrm{AC} = \boldsymbol{6}$



(3) 円 P, Q と y 軸との接点をそれぞれ $\mathrm{A''}$, $\mathrm{C''}$ とする. 円の接線の性質より,

$\mathrm{AB} = \mathrm{BA''}$
$\mathrm{BC} = \mathrm{BC''}$
$\mathrm{OA''} = \mathrm{OA'}$
$\mathrm{OC''} = \mathrm{OC'}$

よって,

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{BA''}\\ &= \mathrm{BO} - \mathrm{OA''}\\ &= \mathrm{BO} - \mathrm{OA'}\\ &= \boldsymbol{b - 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= \mathrm{BC''}\\ &= \mathrm{BO} - \mathrm{OC''}\\ &= \boldsymbol{b - 2}\end{aligned}$$

(4) (3) より,

$\mathrm{AB} = b - 4$
$\mathrm{BC} = b - 2$

よって, $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 2b - 6$

(2) より, $2b - 6 = 6$　ゆえに, $b = 6$

次に, 点 R は直線 PQ 上にあるので,

PR は, $\angle \mathrm{ARA'}$の二等分線
QR は, $\angle \mathrm{CRC'}$の二等分線
より, P, Q, R は一直線上にある.

(1) より, $0 = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$

これを解いて, $x = 8$

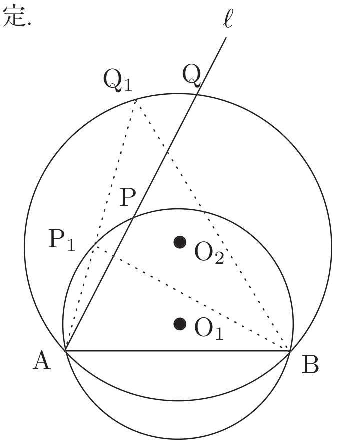
すなわち, $\mathrm{R}(8,\ 0)$ だから, 2 点 $\mathrm{B}(0,\ 6)$, $\mathrm{R}(8,\ 0)$ を通る直線を求めて,

$$\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x + 6}$$

【12】円 O_2 における弧 AB に対する円周角より，$\angle AQB$ は一定 $\cdots$ ①

同様に，円 O_1 における円周角より，$\angle APB$ も一定.

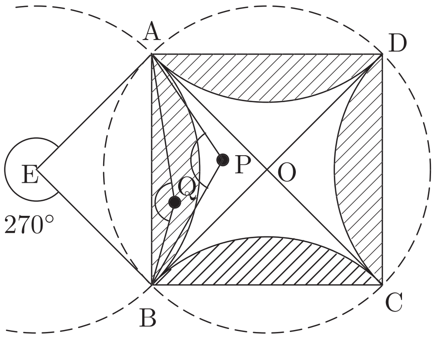
$\therefore\ \ \angle QPB = 180^\circ - \angle APB$ も一定 $\cdots$ ②



①，②より，△ BPQ の 3 つの角の大きさは ℓ の位置に関わらず一定．すなわち，△ BPQ は常に一定の相似形を保つ．その中で，PQ を最大にするものは，PB を最大にするものでもある．PB は円 O_1 の弦であるから，中心 O_1 を通るときに最大になる．このとき，$\angle PAB$ は半円の弧に対する円周角なので，90° となる．よって，**$AB \perp \ell$ となるように ℓ を引けば**，PQ の長さを最大にすることができる.

（このとき，BQ も円 O_2 の直径となるので，BQ の長さについて考察してもよい.）

【13】図のように，点 E をとり，E を中心として点 A，B を通る円周上に点 P をとれば，$\angle APB = 135^\circ$ となる.



円 E の内部に点 P をとれば $\angle APB$ は 135° を超えてしまい，問題の条件を満たさない．したがって，$\angle APB \leqq 135^\circ$ となるには円 E の外部に点 P をとればよい．同様のことが $\angle BPC$, $\angle CPD$, $\angle DPA$ についても言えるので，図の斜線部を除いた部分に点 P をとればよい.

斜線部は正方形 ABCD に外接する円から正方形を除いた部分の面積と等しいので,

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$$

よって，求める面積は $1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \boldsymbol{2 - \frac{\pi}{2}}$

2MJSS/2MJS/2MJ
中２選抜東大・医学部数学
中２数学
中２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	