2MJS/2MJ

冬期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

中２数学

中２東大数学

【1】(1)

$$\frac{\sqrt{2}x-4}{2} > \frac{\sqrt{5}x-3}{3} - 2$$

$$3\sqrt{2}x - 12 > 2\sqrt{5}x - 6 - 12$$

$$(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})x > -6$$

$$x < \frac{-6}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}$$

$(3\sqrt{2} = \sqrt{18},\ 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ より，$3\sqrt{2} < 2\sqrt{5})$

$$\therefore x < \frac{-6(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})}{18-20} = 3(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$$

$$\boldsymbol{x < 9\sqrt{2} + 6\sqrt{5}}$$

(2)

$$2(4x+1)^2 = 32$$

$$(4x+1)^2 = 16$$

$$4x + 1 = \pm 4$$

$$4x = 3,\ -5$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{4},\ -\frac{5}{4}}$$

(3)

$$170x = 7200 + x^2$$

$$-x^2 + 170x - 7200 = 0$$

$$x^2 - 170x + 7200 = 0$$

$$(x-80)(x-90) = 0$$

$$\boldsymbol{x = 80,\ 90}$$

(4)

$$10x + x^2 = 4(1 + x^2)$$

$$10x + x^2 = 4 + 4x^2$$

$$-3x^2 + 10x - 4 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 4 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{3}$$

$$\therefore \boldsymbol{x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}}$$

(5) $\begin{cases} 2x + y = -3 \ \cdots ① \\ x^2 + 3y = 0 \ \cdots ② \end{cases}$

② − ① × 3 より，

$$x^2 - 6x = 9$$
$$x^2 - 6x - 9 = 0$$
$$x = 3 \pm \sqrt{9+9}$$
$$\therefore x = 3 \pm 3\sqrt{2}$$

これを ① に代入して，

$$\begin{aligned} y &= -2(3 \pm 3\sqrt{2}) - 3 \\ &= -6 \mp 6\sqrt{2} - 3 \\ &= -9 \mp 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

以上より，

$\boldsymbol{x = 3 \pm 3\sqrt{2},\ y = -9 \mp 6\sqrt{2}}$

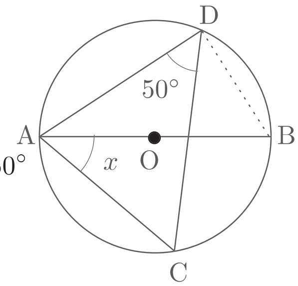
（複号同順）

【2】(1) AB が円の直径であるから

$$\angle \mathrm{ADB} = 90^\circ$$

したがって

$$\begin{aligned} x &= \angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{CDB} \\ &= \angle \mathrm{ADB} - \angle \mathrm{ADC} = 90^\circ - 50^\circ \\ &= \mathbf{40^\circ} \end{aligned}$$



(2) 四角形 ABCD は円に内接するので，

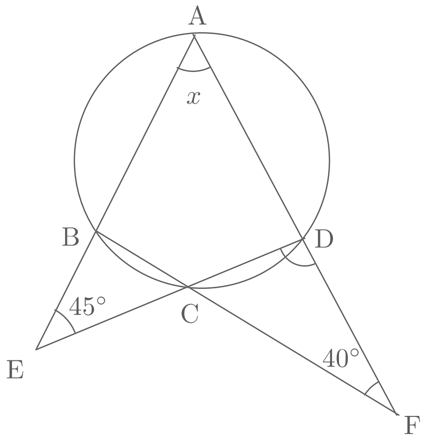
$$\angle \mathrm{DCF} = \angle \mathrm{BAD} = x$$

一方，三角形の外角は内対角の和に等しいので，

$$\angle \mathrm{FDC} = x + 45^\circ$$

△ CDF の内角の和について，

$$\begin{aligned} x + (x + 45^\circ) + 40^\circ &= 180^\circ \\ 2x &= 95^\circ \\ x &= \mathbf{47.5^\circ} \end{aligned}$$



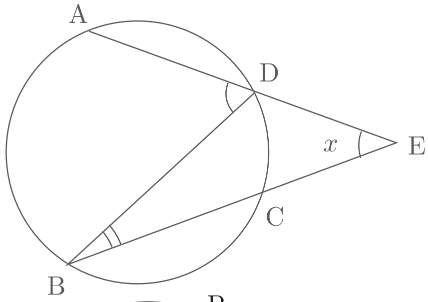
(3) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角

$$\angle \mathrm{ADB} = \frac{6}{6+4+2+3} \times 180^\circ = 72^\circ$$

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角

$$\angle \mathrm{CBD} = \frac{2}{6+4+2+3} \times 180^\circ = 24^\circ$$

$x = \angle \mathrm{ADB} - \angle \mathrm{CBD} = 72^\circ - 24^\circ = \mathbf{48^\circ}$



(4) 接弦定理より，$\angle \mathrm{BPC} = \angle \mathrm{PAB} = x$

AP=CP より，$\angle \mathrm{PCB} = x$

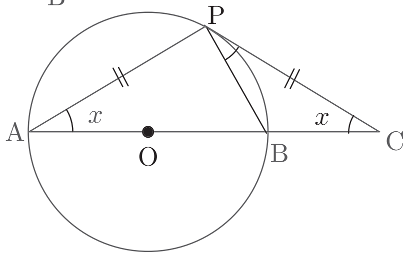
半円の弧に対する円周角なので

$$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$$

△ APC の内角について，

$$x + (90^\circ + x) + x = 180^\circ$$

$$x = \mathbf{30^\circ}$$



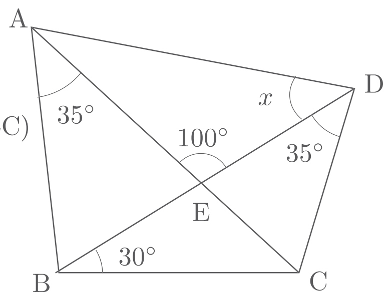
(5) $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BDC}$ より，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある．

$$\angle \mathrm{BEC} = \angle \mathrm{AED} = 100^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BCE} &= 180^\circ - (\angle \mathrm{CBE} + \angle \mathrm{BEC}) \\ &= 180^\circ - (30^\circ + 100^\circ) \\ &= 50^\circ\end{aligned}$$

したがって，

$x = \angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BCE} = \mathbf{50^\circ}$



【3】(1) 2 点 A，B の座標は $A(-4,\ 16a)$，$B(2,\ 4a)$ と表すことができる．

y 座標の差が 9 なので，

$$16a-4a=9$$

$$\boldsymbol{a=\frac{3}{4}}$$

(2) $A(-4,\ 12)$，$B(2,\ 3)$ より，直線 AB の傾きは

$$\frac{3-12}{2-(-4)}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}$$

求める接線の式を $y=-\frac{3}{2}x+k$ とおく．これと $y=\frac{3}{4}x^2$ を連立して

$$-\frac{3}{2}x+k=\frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x-k=0$$

$$x^2+2x-\frac{4}{3}k=0$$

これより，

$$\frac{D}{4}=1+\frac{4}{3}k=0$$

$$k=-\frac{3}{4}$$

よって，$\boldsymbol{y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}}$

(3) 直線 AB を $y=-\frac{3}{2}x+b$ とおくと，$B(2,\ 3)$ を通ることより，

$$3=-3+b \qquad \therefore\ \ b=6 \qquad \therefore\ \ \mathrm{OC}=6$$

よって，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{OC}\times(\mathrm{AB}\ の\ x\ 座標の差)$$

$$=\frac{1}{2}\times 6\times\{2-(-4)\}$$

$$=\mathbf{18}$$

(4) $\triangle\mathrm{ADC}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}}\times\triangle\mathrm{AOB}$ より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}$$

$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{A,\ C}\ の\ x\ 座標の差}{\mathrm{A,\ B}\ の\ x\ 座標の差}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ より，$\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\triangle\mathrm{AOB}$ のときは

$$\frac{2}{3}\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \ \frac{\mathrm{A,\ D}\ の\ x\ 座標の差}{\mathrm{A,\ O}\ の\ x\ 座標の差}=\frac{3}{4}$$

よって，A，D の x 座標の差は 3．つまり，D の x 座標は -1

直線 OA は $y=-3x$ と表せるので，$\mathrm{D}\boldsymbol{(-1,\ 3)}$

【4】(1) 解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{-4\sqrt{3}}{2}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

(2)

$$\alpha\beta=\frac{-5}{2}$$
$$=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

(3)

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(2\sqrt{3})^2-2\times\left(-\frac{5}{2}\right)\\&=12+5\\&=\mathbf{17}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(2\sqrt{3})^2-4\times\left(-\frac{5}{2}\right)\\&=12+10\\&=\mathbf{22}\end{aligned}$$

(5) (4) より，$\alpha-\beta=\pm\sqrt{22}$

ここで，$\alpha<\beta$ より，

$\alpha-\beta=-\sqrt{22}$

$$\begin{aligned}\alpha^2-\beta^2&=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\\&=-\sqrt{22}\times2\sqrt{3}\\&=\mathbf{-2\sqrt{66}}\end{aligned}$$

(6) α は $2x^2-4\sqrt{3}x-5=0$ の解なので，

$$2\alpha^2-4\sqrt{3}\alpha-5=0$$
$$2\alpha^2=4\sqrt{3}\alpha+5$$
$$\alpha^2=2\sqrt{3}\alpha+\frac{5}{2}$$

よって，

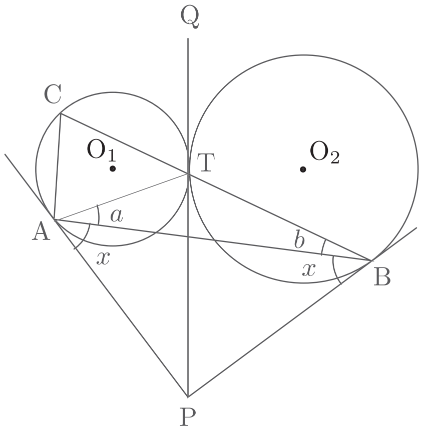
$$\begin{aligned}\alpha^2+2\sqrt{3}\beta-2&=2\sqrt{3}\alpha+\frac{5}{2}+2\sqrt{3}\beta-2\\&=2\sqrt{3}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\\&=2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\\&=12+\frac{1}{2}=\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

【5】(1) 円の外部の点から引いた接線の長さは等しいので，

$$PA = PT \cdots\cdots ①$$

$$PB = PT \cdots\cdots ②$$

①，② より，PA=PB　（証明終）



(2) PA=PB より，∠PAB=∠PBA

この角の大きさを x とおき，

$$\angle TAB = a,\ \angle TBA = b$$

とする．

接弦定理より，∠ACT=∠TAP= $x + a$ ……①

一方，PB=PT より ∠BTP=∠PBT= $x + b$

対頂角より，∠CTQ=∠BTP= $x + b$

接弦定理より，∠CAT=∠CTQ= $x + b$ ……②

ここで△ ABC の内角を考えると，①，② より，

$$(x + b + a) + b + (x + a) = 180^\circ$$

$$\therefore \quad x + b + a = 90^\circ$$

すなわち，∠CAB $= x + b + a = 90^\circ$

よって，△ ABC は直角三角形である．　（証明終）

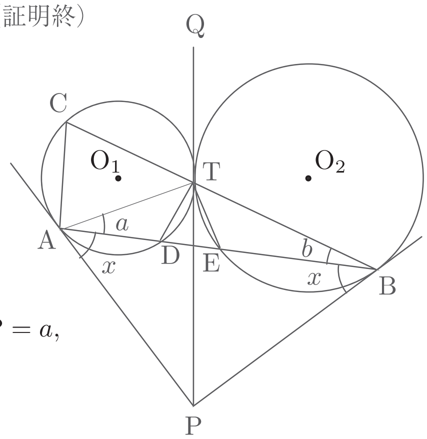
<別解>

AB と円 O_1，O_2 との交点をそれぞれ D，E とおく．

PA = PB より，∠PAB = ∠PBA

この角の大きさを x, ∠TAB= a, ∠TBA= b とおくと，接弦定理より，

$$\angle ATD = x,\ \angle BTE = x,\ \angle DTP = a,$$
$$\angle ETP = b$$



よって，△ TAB において，

∠TAB + ∠ATB + ∠ABT = 180° より，

$$a + (2x + a + b) + b = 180^\circ$$

$$\therefore a + b + x = 90^\circ \cdots ①$$

また，接弦定理より，∠ACT=∠TAP なので，

$$\angle ACT + \angle CBA = x + a + b = 90^\circ \quad (\because \ ①より)$$

$$\therefore \angle CAB = 180^\circ - (\angle ACT + \angle CBA) = 90^\circ$$

よって，△ ABC は直角三角形である．　（証明終）

【6】$\dfrac{D}{4}=k^2-21$ が平方数であることが必要である.

つまり，$k^2-21=m^2$ (m は正の整数) とおけることが必要である.

$$k^2-m^2=21$$

$$(k-m)(k+m)=1\times 21=3\times 7$$

ここで，$k-m<k+m$ および k は正の数より，条件をみたすのは,

$$(k-m,\ k+m)=(1,\ 21),\ (3,\ 7)$$

のいずれかの場合となる.

$$\begin{cases} k-m=1 \\ k+m=21 \end{cases}$$

のとき，$k=11,\ m=10$

このとき，$3x^2-22x+7=0$ は $x=\dfrac{1}{3},\ 7$ となるので条件をみたす.

$$\begin{cases} k-m=3 \\ k+m=7 \end{cases}$$

のとき，$k=5,\ m=2$

このとき，$3x^2-10x+7=0$ は $x=\dfrac{7}{3},\ 1$ となるので条件をみたす.

以上より，$\boldsymbol{k=5,\ 11}$