3MJS/3MJ

冬期講習

解答

Z会東大進学教室

中３数学

中３東大数学

問題

【1】(1) 2つの区別のつく箱をA，Bとする．
5個の区別のできるボールは，それぞれA，Bのいずれかの箱に入るから，1個のボールにつき入れ方が2通りずつ考えられる．
よって，

$$2^5 = \mathbf{32}\text{(通り)}$$

(2) (1)のうち，一方の箱にすべてが入るのは2通り．
よって，(1)から2通りを除いて，

$$32 - 2 = \mathbf{30}\text{(通り)}$$

(3) (1)の箱A，Bの区別の仕方は，

$$2! = 2\text{（通り）}$$

よって，(1)で箱の区別をなくすと，

$$32 \div 2 = \mathbf{16}\text{(通り)}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_7 = {}_{3+7-1}\mathrm{C}_7 &= {}_9\mathrm{C}_7 \\ &= {}_9\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \\ &= \mathbf{36}\ \text{(通り)} \end{aligned}$$

＜別解＞
求める場合の数は，○7個と|2本を一列に並べる並べ方の総数に対応するので，

$$\frac{9!}{7!2!} = \mathbf{36}\ \text{(通り)}$$

(2) 全ての箱に1個ずつリンゴを入れて，残り4個を分ける分け方を考える．

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_4 = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 &= {}_6\mathrm{C}_4 \\ &= {}_6\mathrm{C}_2 \\ &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \\ &= \mathbf{15}\ \text{(通り)} \end{aligned}$$

＜別解＞
(1)の別解と同様に考えれば，求める場合の数は，○4個と|2本を一列に並べる並べ方の総数に対応するので，

$$\frac{6!}{4!2!} = \mathbf{15}\ \text{(通り)}$$

(3) $x \geqq y \geqq z \geqq 0$，$x+y+z=7$ なる整数 $(x,\ y,\ z)$ の組を求めると，

$$\begin{aligned} (x,\ y,\ z) =& (7,\ 0,\ 0) \\ & (6,\ 1,\ 0) \\ & (5,\ 2,\ 0),\ (5,\ 1,\ 1) \\ & (4,\ 3,\ 0),\ (4,\ 2,\ 1) \\ & (3,\ 3,\ 1),\ (3,\ 2,\ 2) \end{aligned}$$

の**8通り**である．

【3】(1) 正 7 角形の異なる 7 個の頂点から 2 個の頂点を選ぶ方法は，

$${}_7C_2 = 21\text{（通り）}$$

選んだ 2 個の頂点を結ぶと直線が引ける．
対角線の本数を求めるためには，ここから正 7 角形の辺の本数を除いて，

$$21 - 7 = \mathbf{14}\text{（通り）}$$

(2) 3 個の頂点で 3 角形が 1 個決定するから，求める個数は，

$${}_7C_3 = \mathbf{35}\text{（通り）}$$

(3) 正 7 角形の頂点を順に A_1，A_2，$\cdots$，A_7 とする．

(i) 正 7 角形と 1 辺だけ共有する場合
辺 A_1A_2 だけを共有する 3 角形のもう 1 つの頂点の選び方は A_4，A_5，A_6 の 3 通りある．他の辺を共有する場合も同様であるから，

$$7 \times 3 = 21\text{（通り）}$$

(ii) 正 7 角形と 2 辺を共有する場合
2 辺 A_1A_2，A_2A_3 を共有する 3 角形は，$\triangle A_1A_2A_3$ の 1 個だけである．
よって，

$$7 \times 1 = 7\text{（通り）}$$

したがって，正 7 角形と辺を共有しない 3 角形の個数は，

$$35 - (21 + 7) = \mathbf{7}\text{（通り）}$$

【4】(1) 横 2 本，縦 2 本選べば長方形が 1 個決まるから，長方形の総数は，

$${}_5C_2 \times {}_6C_2 = \mathbf{150}\text{（個）}$$

(2) 正方形は，

(i) 1 辺が 1cm　(ii) 1 辺が 2cm　(iii) 1 辺が 3cm　(iv) 1 辺が 4cm
の 4 種類が考えられる．
それぞれの正方形の個数を求める．

(i) のとき，$4 \times 5 = 20$（個）　(ii) のとき，$3 \times 4 = 12$（個）

(iii) のとき，$2 \times 3 = 6$（個）　(iv) のとき，$1 \times 2 = 2$（個）

よって，できる正方形の総数は，$20 + 12 + 6 + 2 = 40$（個）
したがって，正方形でない長方形の総数は，(1) より，$150 - 40 = \mathbf{110}$（個）

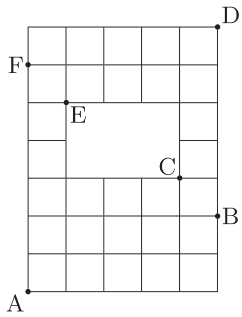
(3) 面積が 4 の長方形は，

(i) 縦 1cm で横 4cm　(ii) 1 辺が 2cm の正方形　(iii) 縦 4cm で横 1cm
のいずれかである．
ここで，(i) のとき，$4 \times 2 = 8$（個）
(ii) のとき，(2) より，12 個
(iii) のとき，$1 \times 5 = 5$（個）
よって，面積が 4 の長方形の総数は，

$$8 + 12 + 5 = \mathbf{25}\text{（個）}$$

【5】(1) A 地点から B 地点に至る経路は，${}_7C_2$ 通り
B 地点から D 地点に至る経路は，1 通り
よって，積の法則より，

$${}_7C_2 \cdot 1 = \mathbf{21}\text{(通り)}$$



(2) A 地点から C 地点に至る経路は，${}_7C_3$ 通り
C 地点から D 地点に至る経路は，${}_5C_1$ 通り
よって，積の法則より，

$${}_7C_3 \cdot {}_5C_1 = 35 \cdot 5 = \mathbf{175}\text{(通り)}$$

(3) 図のように点 E，F をとると，(1)，(2) と同様にして，
A 地点から E 地点を通り，D 地点に至る経路は，

$${}_6C_1 \cdot {}_6C_2 = 6 \cdot 15 = 90 \text{（通り）}$$

また，A 地点から F 地点を通り，D 地点に至る経路は，

$$1 \cdot {}_6C_1 = 6 \text{（通り）}$$

ここで，A 地点から D 地点に至る経路においては，B，C，E，F のいずれか 1 つの地点を必ず通るので，求める経路の総数は，

$$21 + 175 + 90 + 6 = \mathbf{292}\text{(通り)}$$

【6】(1) 「右斜め下」に 2 回,「左斜め下」に 2 回移動すればよいので，

$$\frac{4!}{2!2!} = \mathbf{6}\text{(通り)}$$

(2) 移動の距離が 4 で，点 A から点 C に行くには，
「右斜め下」に 1 回,「左斜め下」に 3 回移動すればよい.
ここで，
「右斜め下」=「左斜め下」+「右」
「左斜め下」=「右斜め下」+「左」
と考えると，移動の距離を 1 増やすことができる.
よって，移動の距離が 5 で，点 A から点 C に行くには，
「右」に 1 回,「左斜め下」に 4 回移動するか，
「左」に 1 回,「右斜め下」に 2 回,「左斜め下」に 2 回移動すればよいので，

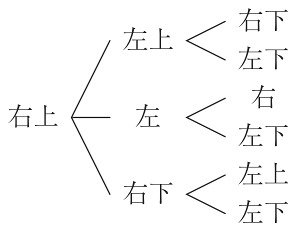
$$\begin{aligned}\frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{1!2!2!} &= 5 + 30 \\ &= \mathbf{35}\ \text{(通り)}\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) と同様に考えると，
移動の距離が 5 で，点 A から点 B に行くには，
「右」に 1 回,「右斜め下」に 1 回,「左斜め下」に 3 回移動するか，
「左」に 1 回,「右斜め下」に 3 回,「左斜め下」に 1 回移動すればよいので，

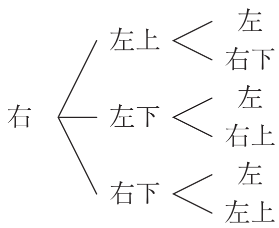
$$\begin{aligned}\frac{5!}{1!1!3!} + \frac{5!}{1!3!1!} &= 20 + 20 \\ &= \mathbf{40}\ \text{(通り)}\end{aligned}$$

(4) 1 回目の移動で「右斜め上」に行く場合と「左斜め上」に行く場合の数は同じ.
同様に，1 回目の移動で「右」に行く場合と「左」に行く場合や,「右斜め下」に行く場合と「左斜め下」に行く場合の数も同じ.
以上より，1 回目の移動で,「右斜め上」,「右」,「右斜め下」に行く場合の数を求め，それらを 2 倍すればよい.

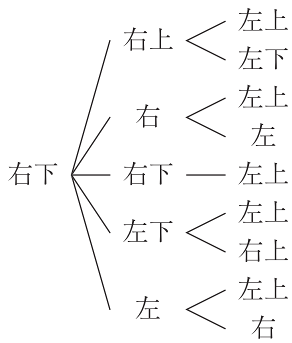
(i) 1 回目の移動が「右斜め上」のとき，
3 回目まで点 A を通らず，3 回目の移動で A から距離 1 の点にいる移動の数は，図で示すとおり，6 通り



(ii) 1 回目の移動が「右」のとき，
3 回目まで点 A を通らず，3 回目の移動で A から距離 1 の点にいる移動の数は，図で示すとおり，6 通り



(iii) 1 回目の移動が「右斜め下」のとき，
3 回目まで点 A を通らず，3 回目の移動で A から距離 1 の点にいる移動の数は，図で示すとおり，9 通り



以上，(i)〜(iii) より，求める経路の総数は，

$$2(6+6+9)=\mathbf{42}\text{（通り）}$$

問題

【1】(1) 2 枚のカードの取り出し方は,

$$_{12}\mathrm{C}_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \text{（通り）}$$

であり，連続した数字のカードを取り出す取り出し方は,

$$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ \cdots,\ (11,\ 12)$$

の 11 通りなので，求める確率は,

$$P_1 = \frac{11}{66} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) 3 枚のカードの取り出し方は,

$$_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220 \text{（通り）}$$

であり，連続した 3 枚のカードを取り出す取り出し方は,

$$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4), \cdots,\ (10,\ 11,\ 12)$$

の 10 通りなので，求める確率は,

$$P_2 = \frac{10}{220} = \mathbf{\frac{1}{22}}$$

(3) 2 枚の連続するカードに対して，残りの 1 枚の取り出し方を考えると,

(1, 2) のとき，残りの 1 枚は，4，5，$\cdots$，12 の 9 通り.

(2, 3) のとき，残りの 1 枚は，5，6，$\cdots$，12 の 8 通り.

(3, 4) のとき，残りの 1 枚は，1，6，7，$\cdots$，12 の 8 通り.

$\cdots$　$\cdots$　　　$\cdots$

(9, 10) のとき，残りの 1 枚は，1，2，$\cdots$ 7，12 の 8 通り.

(10, 11) のとき，残りの 1 枚は，1，2，$\cdots$ 8 の 8 通り.

(11, 12) のとき，残りの 1 枚は，1，2，$\cdots$ 9 の 9 通り．ゆえに，題意をみたす選び方は,

$$9 \cdot 2 + 8 \cdot 9 = 90 \text{（通り）}$$

これより，求める確率は,

$$P_3 = \frac{90}{220} = \mathbf{\frac{9}{22}}$$

(4) 「(2) または (3)」の余事象を考えて,

$$P_4 = 1 - \left(\frac{1}{22} + \frac{9}{22}\right) = \mathbf{\frac{6}{11}}$$

【2】(1) ① 取り出された球が 2 個とも赤球である確率は,

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{2}{7}$$

取り出された球が 2 個とも白球である確率は,

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{1}{7}$$

取り出された球が赤球, 白球 1 個ずつである確率は,

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{4}{7}$$

である. 2 回の試行の後に, 2 の位置にあるということは, 取り出された球が 2 個とも赤球であった回数を a 回, 2 個とも白球であった回数を b 回, 赤球, 白球 1 個ずつであった回数を $2-a-b$ 回とすると,

$$a-b=2 \quad (0 \leqq a+b \leqq 2)$$

これを満たすのは,

$$(a,\ b)=(2,\ 0)$$

よって, 2 の位置にあるためには, 2 個とも赤球であった回数が 2 回であればよい.
したがって, 求める確率は,

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{4}{49}}$$

② 2 回の試行の後に, 1 の位置にあるということは, 取り出された球が 2 個とも赤球であった回数を a 回, 2 個とも白球であった回数を b 回, 赤球, 白球 1 個ずつであった回数を $2-a-b$ 回とすると,

$$a-b=1 \quad (0 \leqq a+b \leqq 2)$$

これを満たすのは,

$$(a,\ b)=(1,\ 0)$$

よって, 1 の位置にあるためには, 2 個とも赤球であった回数は 1 回, 赤球と白球が 1 個ずつであった回数は 1 回であればよい.
したがって, 求める確率は,

$${}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{7} = \boldsymbol{\frac{16}{49}}$$

(2) ① 4 回の試行の後に，2 の位置にあるということは，取り出された球が 2 個とも赤球であった回数を a 回，2 個とも白球であった回数を b 回，赤球，白球 1 個ずつであった回数を $4-a-b$ 回とすると，

$$a-b=2 \quad (0 \leqq a+b \leqq 4) \ \cdots \text{(i)}$$

また，P は少なくとも 1 回負の方向に移動するので，

$$b \geqq 1 \ \cdots \text{(ii)}$$

である．
(i)，(ii) を満たすのは，

$$(a,\ b)=(3,\ 1)$$

よって，2 の位置にあるためには，2 個とも赤球であった回数は 3 回，2 個とも白球であった回数は 1 回であればよい．
したがって，求める確率は，

$${}_4\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{32}{2401}}$$

② 4 回の試行の後に，2 の位置にあるということは，取り出された球が 2 個とも赤球であった回数を a 回，2 個とも白球であった回数を b 回，赤球，白球 1 個ずつであった回数を $4-a-b$ 回とすると，

$$a-b=2 \quad (0 \leqq a+b \leqq 4)$$

である．
これを満たすのは，

$$(a,\ b)=(2,\ 0) \ \cdots \text{(i)},\ (3,\ 1) \ \cdots \text{(ii)}$$

である．

(i) 2 個とも赤球であった回数は 2 回，2 個とも白球であった回数は 0 回，赤球，白球 1 個ずつであった回数は 2 回の確率は，

$${}_4\mathrm{C}_2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{384}{2401}$$

(ii) 2 個とも赤球であった回数は 3 回，2 個とも白球であった回数は 1 回，赤球，白球 1 個ずつであった回数は 0 回の確率は，

$${}_4\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{32}{2401}$$

したがって，(i)，(ii) は互いに排反な事象なので，求める確率は，

$$\frac{384}{2401} + \frac{32}{2401} = \mathbf{\frac{416}{2401}}$$

【3】(1) 2 つの目の和が 10 以上になる確率は,

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

2 つの目の和が 9 以下になる確率は,

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

である.

5 回の移動の後に,(4, 5) の位置にあるということは,2 つの目の和が 10 以上になる回数を a 回,9 以下になる回数を $5-a$ 回とすると,

$$2a-(5-a)=4$$
$$\therefore\ a=3$$

よって,(4, 5) の位置にあるためには,2 つの目の和が 10 以上になる回数が 3 回,9 以下になる回数が 2 回であればよい.

したがって,求める確率は,

$${}_5\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{125}{3888}}$$

(2) 6 回の移動の後に,(4, 5) を通り,(5, 6) の位置にあるということは,5 回の移動で (4, 5) に達し,6 回目で (5, 6) に達するということである.5 回の移動で (4, 5) に達する確率は,(1) より,$\frac{125}{3888}$

6 回目で (4, 5) から (5, 6) に達するということは,1 回の試行で,x 軸方向に $+1$ 移動するということである.これは起こりえないので,求める確率は,**0**

(3) 7 回の移動の後に,(4, 5) を通り,(5, 7) の位置にあるということは,5 回の移動で (4, 5) に達し,7 回目で (5, 7) に達するということである.

5 回の試行で (4, 5) に達する確率は,(1) より,$\frac{125}{3888}$

7 回目で (4, 5) から (5, 7) に達するということは,2 回の移動で,x 軸方向に $+1$ 移動するということである.

2 回の移動で,x 軸方向に $+1$ 移動するということは,2 つの目の和が 10 以上になる回数を a 回,9 以下になる回数を $2-a$ 回とすると,

$$2a-(2-a)=1$$
$$\therefore\ a=1$$

よって,2 回の移動で,x 軸方向に $+1$ 移動するためには,2 つの目の和が 10 以上になる回数が 1 回,9 以下になる回数が 1 回であればよい.この確率は,

$${}_2\mathrm{C}_1\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$$

したがって,求める確率は,

$$\frac{125}{3888}\times\frac{5}{18}=\boldsymbol{\frac{625}{69984}}$$

【4】　白いサイコロの目を 1 回目からそれぞれ w_1，w_2，w_3

黒いサイコロの目を 1 回目からそれぞれ b_1，b_2，b_3

とすると，w_1，w_2，w_3 と同じ数字の箱に関して，皿を 1 枚ずつ加え，
b_1，b_2，b_3 と同じ数字の箱に関して，皿を 1 枚ずつ除けばよい．

また，目の出方は，全部で 6^6 通りある．

(1) 題意をみたすためには，w_1，w_2，w_3，b_1，b_2，b_3 が，それぞれ異なればよいので，
求める確率は，

$$\frac{6!}{6^6} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^6} = \mathbf{\frac{5}{324}}$$

(2) 5 枚の箱，4 枚の箱，3 枚の箱 2 つ，2 枚の箱，1 枚の箱の選び方は，

$${}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1 = 360 \text{（通り）}$$

また，そのおのおのに対して，

w_1，w_2，w_3 のうち 2 つは 5 枚の箱の数字で，1 つは 4 枚の箱の数字

b_1，b_2，b_3 のうち 2 つは 1 枚の箱の数字で，1 つは 2 枚の箱の数字

となるので，求める場合の数は，

$$360\cdot({}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_1\mathrm{C}_1)\cdot({}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_1\mathrm{C}_1) = 360\cdot3\cdot3$$

よって，求める確率は，

$$\frac{360\cdot3\cdot3}{6^6} = \mathbf{\frac{5}{72}}$$

【5】(1)　　c：地点 C を通過する事象

とし，事象 x が起こる確率を $P(x)$ と定義する．

まず，地点 A から地点 B に至る最短経路の総数は，

$\dfrac{9!}{5!4!}$（通り）

地点 C を通過する確率 $P(c)$ は，

$$P(c)=\frac{\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{5!}{3!2!}}{\dfrac{9!}{5!4!}}=\boldsymbol{\frac{10}{21}}$$

(2)　　d：地点 D を通過する事象

とする．

地点 D を通過する確率 $P(d)$ は，

$$P(d)=\frac{\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{4!}{3!1!}}{\dfrac{9!}{5!4!}}=\frac{20}{63}$$

地点 C，D どちらも通過する確率は，$P(c\cap d)$ と表せるので，

$$P(c\cap d)=\frac{\dfrac{4!}{2!2!}\times 1\times\dfrac{4!}{3!1!}}{\dfrac{9!}{5!4!}}=\frac{4}{21}$$

地点 C または D を通過する確率は，$P(c\cup d)$ と表すことができるので，

$$\begin{aligned}P(c\cup d)&=P(c)+P(d)-P(c\cap d)\\&=\frac{10}{21}+\frac{20}{63}-\frac{4}{21}\\&=\frac{38}{63}\end{aligned}$$

地点 C，D どちらも通過しない確率は，$P\left(\overline{c\cup d}\right)$ と表すことができる．

したがって，

$$\begin{aligned}P\left(\overline{c\cup d}\right)&=1-P(c\cup d)\\&=1-\frac{38}{63}\\&=\boldsymbol{\frac{25}{63}}\end{aligned}$$

【6】(1) A から C に到達する確率は,

$$3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

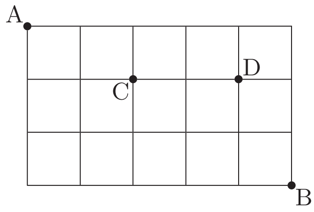
C から D に到達する確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

D から B に到達する確率は，1

よって，求める確率は,

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{3}{32}}$$



(2) 図のように G，H，I を定める.

(i) E を通過する確率を求める.

A から G に到達する確率は,

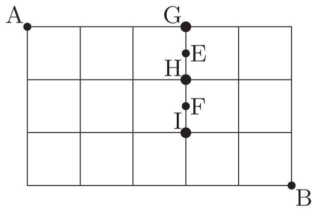
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

G から H に到達する確率は，$\frac{1}{2}$

H から B に到達する確率は，1

よって，E を通過する確率は,

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$$



(ii) F を通過する確率を求める.

A から H に到達する確率は,

$$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$$

H から I に到達する確率は，$\frac{1}{2}$

I から B に到達する確率は，1

よって，F を通過する確率は,

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$$

(iii) E も F も通過する確率を求める.

A から G に到達する確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

G から I に到達する確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

I から B に到達する確率は，1

よって，E も F も通過する確率は,

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{32}$$

これより，E または F を通過する確率は,

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{5}{32}$$

よって，E も F も通過しない確率は,

$$1-\frac{5}{32}=\boldsymbol{\frac{27}{32}}$$

問題

【1】(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \{\sin 10^\circ - \sin(90^\circ + 10^\circ)\}^2 + \{\sin(180^\circ + 10^\circ) + \sin(180^\circ + 100^\circ)\}^2 \\
&= (\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2 + (-\sin 10^\circ - \sin 100^\circ)^2 \\
&= (\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2 + \{-\sin 10^\circ - \sin(90^\circ + 10^\circ)\}^2 \\
&= (\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2 + (-\sin 10^\circ - \cos 10^\circ)^2 \\
&= \sin^2 10^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ \\
&\qquad\qquad + 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ + \cos^2 10^\circ \\
&= 2(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) \\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{\dfrac{4}{\cos^2\theta} - 9 - 8\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{7}{\cos^2\theta} - \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 17\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} \\
&= \frac{4\left(1+\tan^2\theta\right) - 9 - 8\tan\theta}{7\left(1+\tan^2\theta\right) - \tan^2\theta + 17\tan\theta} \\
&= \frac{4\tan^2\theta - 8\tan\theta - 5}{6\tan^2\theta + 17\tan\theta + 7} \\
&= \frac{(2\tan\theta+1)(2\tan\theta-5)}{(2\tan\theta+1)(3\tan\theta+7)} \\
&= \frac{\boxed{\mathbf{2}}\tan\theta - \boxed{\mathbf{5}}}{\boxed{\mathbf{3}}\tan\theta + \boxed{\mathbf{7}}}
\end{aligned}
$$

(3) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{3}$ の両辺を 2 乗すると，

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{9} &\iff 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9} \\
&\iff \sin\theta\cos\theta = -\frac{5}{18}
\end{aligned}
$$

①

$$
\begin{aligned}
\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)\cdot\frac{2}{3} \\
&= \mathbf{\frac{23}{27}}
\end{aligned}
$$

②

$$
\begin{aligned}
\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{1}{-\dfrac{5}{18}} = -\mathbf{\frac{18}{5}}
\end{aligned}
$$

③
$$
\begin{aligned}
(\sin\theta-\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\
&=1-2\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)\\
&=\frac{14}{9}
\end{aligned}
$$

ここで，$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるので，$\sin\theta \geqq 0$，$\cos\theta \leqq 0$．よって，

$$\sin\theta-\cos\theta \geqq 0$$

ゆえに，

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{14}{9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{3}}$$

④ $\sin\theta=\dfrac{2}{3}-\cos\theta$ より，

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta &= \left(\frac{2}{3}-\cos\theta\right)^2\\
1-\cos^2\theta &= \frac{4}{9}-\frac{4}{3}\cos\theta+\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\cos^2\theta-\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{5}{9}=0\\
&18\cos^2\theta-12\cos\theta-5=0
\end{aligned}
$$

よって，

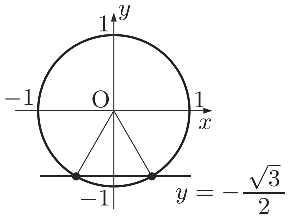
$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{6\pm\sqrt{36+90}}{18}\\
&=\frac{6\pm3\sqrt{14}}{18}\\
&=\frac{2\pm\sqrt{14}}{6}
\end{aligned}
$$

$\cos\theta \leqq 0$ より，

$$\cos\theta=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{14}}{6}}$$

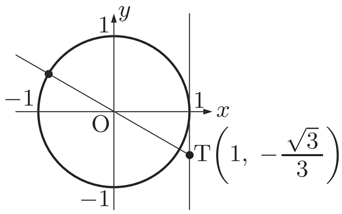
【2】(1)
$$2\sin\theta+\sqrt{3}=0$$
$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\theta=$ **240°，300°**



(2)
$$\left(3+\sqrt{3}\right)\tan\theta=\sqrt{3}(\tan\theta-1)$$
$$3\tan\theta=-\sqrt{3}$$
$$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，$\theta=$ **150°，330°**

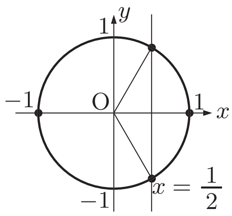


(3)
$$2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$$
$$2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=0$$
$$\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$$
$$\therefore\ \sin\theta=0,\ \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$\sin\theta=0$ のとき，$\theta=0°,\ 180°$

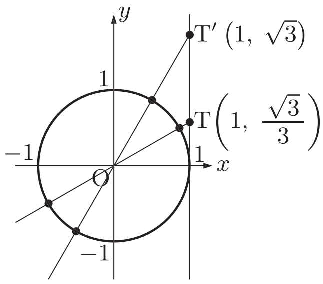
$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\theta=60°,\ 300°$

よって，$\theta=$ **0°，60°，180°，300°**



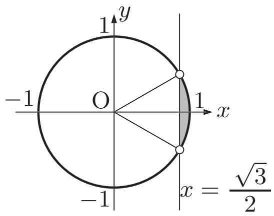
(4)
$$3\tan\theta+\frac{3}{\tan\theta}=4\sqrt{3}$$
$$3\tan^2\theta-4\sqrt{3}\tan\theta+3=0$$
$$(3\tan\theta-\sqrt{3})(\tan\theta-\sqrt{3})=0$$
$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{3}$$

よって，$\theta=$ **30°，60°，210°，240°**



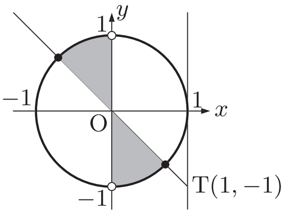
(5)
$$2\cos\theta-\sqrt{3}>0$$
$$\cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，**$0°\leqq\theta<30°$，$330°<\theta<360°$**



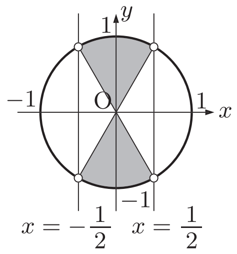
(6) $$\tan\theta + 1 \leqq 0$$
$$\tan\theta \leqq -1$$

よって，$\boldsymbol{90^\circ < \theta \leqq 135^\circ}$，$\boldsymbol{270^\circ < \theta \leqq 315^\circ}$



(7) $$3\cos^2\theta < \sin^2\theta$$
$$3\cos^2\theta < 1 - \cos^2\theta$$
$$4\cos^2\theta - 1 < 0$$
$$(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) < 0$$
$$-\frac{1}{2} < \cos\theta < \frac{1}{2}$$

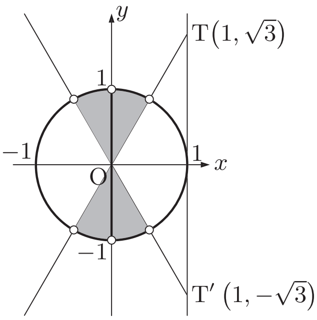
よって，$\boldsymbol{60^\circ < \theta < 120^\circ}$，$\boldsymbol{240^\circ < \theta < 300^\circ}$



(8) $$|\tan\theta| > \sqrt{3}$$
$$\tan\theta < -\sqrt{3},\ \tan\theta > \sqrt{3}$$

よって，

$\boldsymbol{60^\circ < \theta < 90^\circ}$，$\boldsymbol{90^\circ < \theta < 120^\circ}$，
$\boldsymbol{240^\circ < \theta < 270^\circ}$，$\boldsymbol{270^\circ < \theta < 300^\circ}$



【3】 $$y = \sin^4\theta + \cos^4\theta$$
$$= \sin^4\theta + \left(\cos^2\theta\right)^2$$
$$= \sin^4\theta + \left(1 - \sin^2\theta\right)^2$$
$$= 2\sin^4\theta - 2\sin^2\theta + 1$$

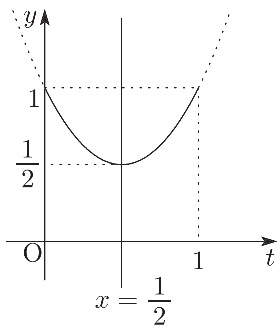
ここで，$t = \sin^2\theta$ とすると，$0 \leqq t \leqq 1$ より，

$$y = 2t^2 - 2t + 1$$
$$= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

よって，y の最大値・最小値は，

$$\begin{cases} t = 0,\ 1 \text{ のとき，} & \textbf{最大値 } \boldsymbol{1} \\ t = \dfrac{1}{2} \text{ のとき，} & \textbf{最小値 } \boldsymbol{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

である．



【4】

$$
\begin{aligned}
y &= \cos(90^\circ - \theta)\sin(180^\circ - \theta) + a\cos\theta + 1 \\
&= \sin\theta \cdot \sin\theta + a\cos\theta + 1 \\
&= (1 - \cos^2\theta) + a\cos\theta + 1 \\
&= -\cos^2\theta + a\cos\theta + 2
\end{aligned}
$$

ここで，$t = \cos\theta$ とすると，$0 \leqq t \leqq 1$ で，

$$
\begin{aligned}
y &= -t^2 + at + 2 \\
&= -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 2
\end{aligned}
$$

(1) 軸 $t = \dfrac{a}{2}$ の位置により場合分けを行う.

(i) $\dfrac{a}{2} < 0$ すなわち $a < 0$ のとき，
最大値は，$t = 0$ のとき，$y = 2$ となる.

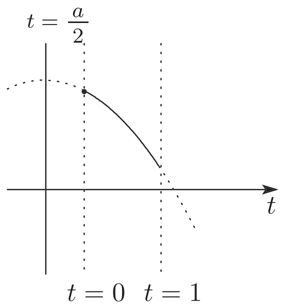
(ii) $0 \leqq \dfrac{a}{2} < 1$ すなわち $0 \leqq a < 2$ のとき，
最大値は $t = \dfrac{a}{2}$ のとき，$y = \dfrac{a^2}{4} + 2$ となる.

(iii) $\dfrac{a}{2} \geqq 1$ すなわち $a \geqq 2$ のとき，
最大値は $t = 1$ のとき，$y = a + 1$ となる.

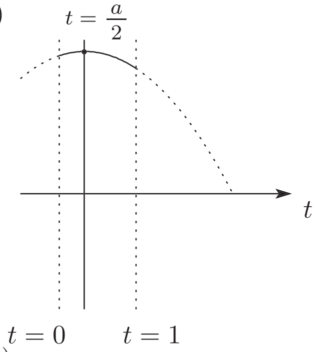
以上をまとめると，

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a < 0} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{2} \\
\boldsymbol{0 \leqq a < 2} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{\dfrac{a^2}{4} + 2} \\
\boldsymbol{a \geqq 2} \textbf{ のとき，} & \boldsymbol{a + 1}
\end{cases}
$$

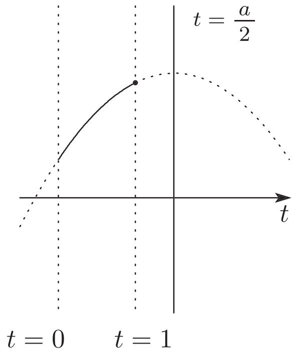
(1) (i)



(ii)

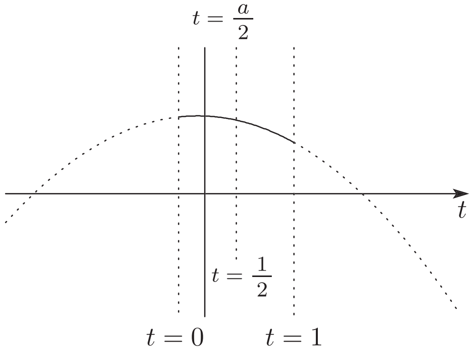


(iii)



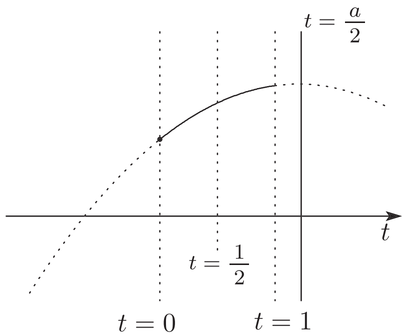
(2) 軸 $t=\dfrac{a}{2}$ の位置で場合分けを行う.

(i)



$\dfrac{a}{2}<\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $a<1$ のとき，
最小値は $t=1$ のとき，$y=a+1$ となる.

(ii)



$\dfrac{a}{2}\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $a\geqq 1$ のとき，
最小値は $t=0$ のとき，$y=2$ となる.

以上をまとめると，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<1} \text{ のとき，} & \boldsymbol{a+1} \\ \boldsymbol{a\geqq 1} \text{ のとき，} & \boldsymbol{2} \end{cases}$$

【5】
$$
\begin{aligned}
\cos^2\theta+\sin\theta-a&=0\\
(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-a&=0\\
-\sin^2\theta+\sin\theta+1&=a
\end{aligned}
$$

ここで，$t=\sin\theta$ とすると，t の方程式

$$-t^2+t+1=a$$

において，

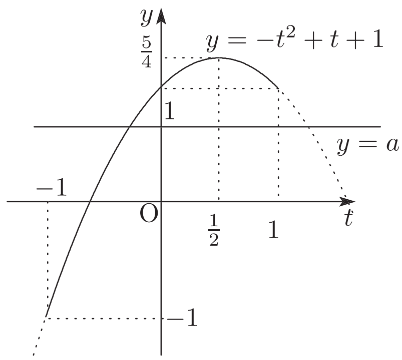
$-1<t<1$ の解 1 つに対して,θが 2 つ.

$t=\pm1$ の解 1 つに対して,θが 1 つ

対応する.
$y=-t^2+t+1$ と $y=a$ のグラフを考えると,

$$
\begin{aligned}
y&=-t^2+t+1\\
&=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

これより，$y=-t^2+t+1$ と $y=a$ のグラフは右図のようになる.
よって，θ の方程式の解の個数は,



$a>\dfrac{5}{4}$のとき, 0 個

$a=\dfrac{5}{4}$のとき, 2 個

$1<a<\dfrac{5}{4}$のとき, 4 個

$a=1$ のとき, 3 個

$-1<a<1$ のとき, 2 個

$a=-1$ のとき, 1 個

$a<-1$ のとき, 0 個

以上をまとめると,

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{1<a<\frac{5}{4}}\text{ のとき,} & \textbf{4 個}\\
\boldsymbol{a=1}\text{ のとき,} & \textbf{3 個}\\
\boldsymbol{a=\frac{5}{4},\ -1<a<1}\text{ のとき,} & \textbf{2 個}\\
\boldsymbol{a=-1}\text{ のとき,} & \textbf{1 個}\\
\boldsymbol{a>\frac{5}{4},\ a<-1}\text{ のとき,} & \textbf{0 個}
\end{cases}
$$

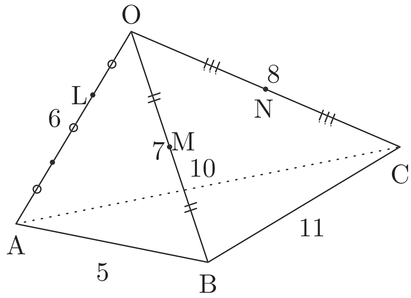
問題

【1】(1) $\triangle$OAC について，OA $= 6$，OC $= 8$，AC $= 10$ であるので，

$$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OC}^2 = \mathrm{AC}^2$$

これより，$\angle\mathrm{AOC} = \mathbf{90°}$

また，$\mathrm{OL} = \dfrac{1}{3}\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{ON} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OC} = 4$ であることから，



$$\mathrm{LN}^2 = \mathrm{OL}^2 + \mathrm{ON}^2$$
$$= 2^2 + 4^2 = 20$$

LN > 0 であるので，$\mathrm{LN} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

(2) $\triangle$OAB において，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \mathbf{\frac{5}{7}}$$

また，$\mathrm{OL} = 2$，$\mathrm{OM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OB} = \dfrac{7}{2}$ であるから，$\triangle$OLM において，余弦定理より，

$$\mathrm{LM}^2 = \mathrm{OL}^2 + \mathrm{OM}^2 - 2 \cdot \mathrm{OL} \cdot \mathrm{OM} \cdot \cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{25}{4}$$

LM > 0 より，$\mathrm{LM} = \mathbf{\dfrac{5}{2}}$

(3) $\triangle$OBC において，中点連結定理より，

$$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \frac{11}{2}$$

よって，$\triangle$LMN において，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{LMN} = \frac{\mathrm{LM}^2 + \mathrm{MN}^2 - \mathrm{LN}^2}{2 \cdot \mathrm{LM} \cdot \mathrm{MN}}$$
$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 - (2\sqrt{5})^2}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{11}{2}} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

$\sin\angle\mathrm{LMN} > 0$ より，

$$\sin\angle\mathrm{LMN} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

これより，$\triangle$LMN の面積は，

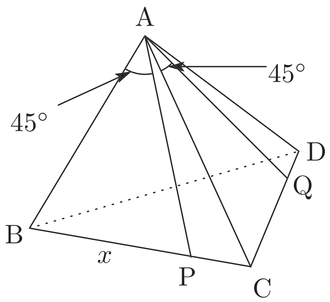
$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{LM} \cdot \mathrm{MN} \cdot \sin\angle\mathrm{LMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{11}{2}}$$

(4)
$$V_1 = \frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OA}} \cdot \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OB}} \cdot \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OC}} \cdot V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot V = \frac{1}{12}V$$

よって，

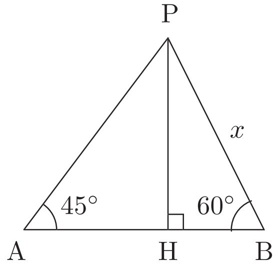
$$\frac{V_1}{V} = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

【2】(1) P から AB に垂線を引き，その足を H とする．



BP $= x$ とすると，

$$\mathrm{BH} = x\cos 60^\circ = \frac{1}{2}x$$
$$\mathrm{PH} = x\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$\mathrm{AH} = \mathrm{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$



よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{AH} + \mathrm{BH}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}x\\ &= 1\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{\sqrt{3}+1}\\ &= \sqrt{3}-1\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}\mathrm{CP} &= 1-(\sqrt{3}-1)\\ &= \boldsymbol{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

また，$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ACQ}$ であるから，

$$\mathrm{CQ} = \mathrm{BP} = \boldsymbol{\sqrt{3}-1}$$

<別解>

BP $= x$ とする．$\triangle$ABP に正弦定理を用いて，

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 75^\circ}$$

よって，

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}\\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{3}-1\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{CP} &= 1-(\sqrt{3}-1)\\ &= \boldsymbol{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

また，$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ACQ}$ であるから，

$$\mathrm{CQ} = \mathrm{BP} = \boldsymbol{\sqrt{3}-1}$$

(2) A から △BCD に垂線 AH を引くと，H は △BCD の重心である．

ここで，CD の中点を M とすると，$\mathrm{BM} = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

よって，$\mathrm{BH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

これより，

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}^2 &= \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2 \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{AH} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって，四面体 APCQ の体積 V は，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{CPQ} \cdot \mathrm{AH} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{CP} \cdot \mathrm{CQ} \cdot \sin 60^\circ\right) \cdot \mathrm{AH} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{12}}\end{aligned}$$

【3】 (1) △OAH，△OBH，△OCH は合同な直角三角形だから，

$$\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = \mathrm{CH}$$

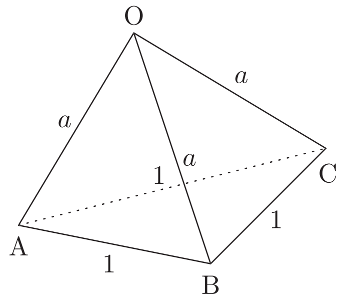
よって，H は △ABC の外接円の中心であり，AH は外接円の半径である．
よって，△ABC に正弦定理を用いて，

$$\frac{1}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$R = \frac{1}{2\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{OH} &= \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \boldsymbol{\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}}\end{aligned}$$



(3) 球 S の中心を D とすると，

$$\mathrm{DH} = \mathrm{OH} - \mathrm{OD} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - r$$

また，$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2 = \mathrm{AD}^2$ であるから，

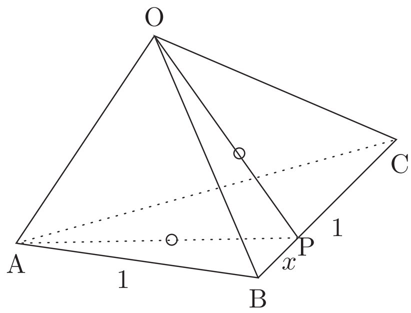
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - r\right)^2 = r^2$$

$$a^2 - 2r\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} = 0$$

$$\therefore r = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{3a^2-1}}}$$

【4】(1) △OBP に余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot\cos 60^\circ\\ &= x^2 - x + 1\end{aligned}$$



同様に,△ABP に余弦定理を用いて,

$$\mathrm{AP}^2 = x^2 - x + 1$$

ここで,△OAP を考えると,AP = OP の二等辺三角形である.

P から AO に下ろした垂線の足を H とすると,H は AO の中点で,

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}^2 &= \mathrm{AP}^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= x^2 - x + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

よって,△OAP の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AO}\cdot\mathrm{PH}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}}}\end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^2 - x + \dfrac{3}{4}$ とし,$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を考える.

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

より,$x = \dfrac{1}{2}$ のとき,$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ が最小値となる.

よって,△OAP の面積の最小値は,$x = \dfrac{1}{2}$ のとき,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

【5】(1)
$$\mathrm{CP} = \frac{1}{3}\mathrm{CD} = 2$$

よって，

$$\triangle\mathrm{BCP} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CP} = \mathbf{6}$$

また，

$$\begin{aligned}\text{四面体 CBPG} &= \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCP}\cdot\mathrm{CG}\\ &= \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 6 = \mathbf{12}\end{aligned}$$

(2) △BCP に三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CP}^2 = 6^2 + 2^2 = 40\\ \mathrm{BP} &= 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

△CGP に三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{GP}^2 &= \mathrm{CG}^2 + \mathrm{CP}^2 = 6^2 + 2^2 = 40\\ \mathrm{GP} &= 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

△BCG に三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{BG}^2 &= \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CG}^2 = 6^2 + 6^2 = 72\\ \mathrm{BG} &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

△BPG に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{BPG} &= \frac{\mathrm{BP}^2 + \mathrm{GP}^2 - \mathrm{BG}^2}{2\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{GP}}\\ &= \frac{(2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 - (6\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}}\\ &= \mathbf{\frac{1}{10}}\end{aligned}$$

$\sin\angle\mathrm{BPG} > 0$ より，

$$\sin\angle\mathrm{BPG} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

これより，

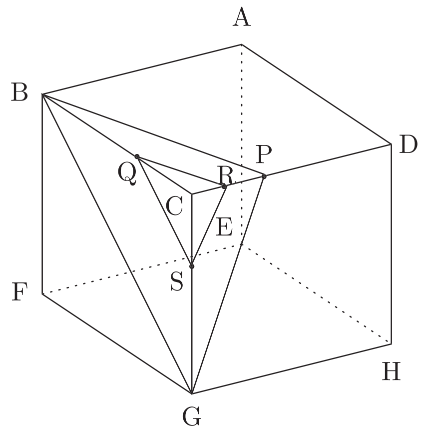
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BPG} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{PG}\cdot\sin\angle\mathrm{BPG}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{3\sqrt{11}}{10}\\ &= \mathbf{6\sqrt{11}}\end{aligned}$$

(3) $\triangle$QRS を含む平面と $\triangle$BPG を含む平面が平行になるから，四面体 CQRS $\backsim$ 四面体 CBPG であり，その相似比は，

$$\mathrm{CQ}:\mathrm{CB}=t:6$$

であり，$\triangle$QRS と $\triangle$BPG の面積比は，$t^2:6^2$ である．
よって，$\triangle$QRS の面積は，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{QRS}&=\frac{t^2}{36}\triangle\mathrm{BPG}\\&=\frac{t^2}{36}\cdot6\sqrt{11}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{6}t^2}\end{aligned}$$



(4) BP // XD となるから，

$$\mathrm{AX}=\mathrm{CP}=\mathbf{2}$$

である．四角形 DXYZ は平行四辺形であるから，その面積を S とすると，

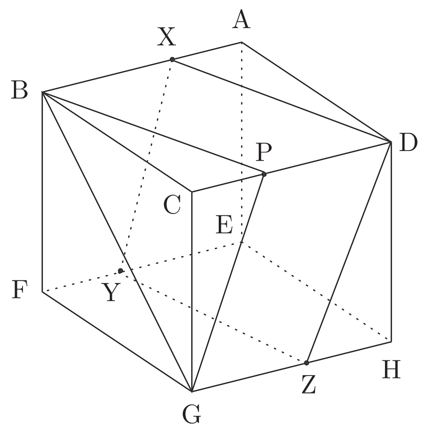
$$S=2\triangle\mathrm{XDZ}$$

また，$\triangle\mathrm{XDZ}\equiv\triangle\mathrm{BPG}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{XDZ}=6\sqrt{11}$$

したがって，

$$S=2\cdot6\sqrt{11}=\mathbf{12\sqrt{11}}$$



(5) 辺 EF 上に点 S を XS // AE となるようにとり，
辺 CD 上に点 T を TZ // DH となるようにとる．
四面体 XYZS と四面体 ZDXT は合同であるから，
求める体積は直方体 BFGC − XSZT の体積と等しくなるので，

$$\frac{2}{3}\cdot6^3=\mathbf{144}$$

3MJS/3MJ
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	